VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (1)

Bevezető, Számsorozatok

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.

Kónya Ilona

2003. szeptember

Szerkesztette: Győri Sándor

I. rész
Bevezető

1. A valós számok ($\mathbb{R}$) axiómái

L. Császár Ákosné: Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása 05-1315 (25–34. oldal)

1.1. Algebrai axiómák

$\mathbb{R}$-ben értelmezett két művelet: $+$ és $\cdot$
Ezek a műveletek nem vezetnek ki az adott halmazból, $\mathbb{R}$-ből, tehát $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$-re: $a + b \in \mathbb{R}$ és $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

$+$ művelet tulajdonságai (1–4.).

1. $(a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$-re (az összeadás *asszociatív*).
2. Létezik egyetlen szám (ezt 0-val jelöljük), amelyre teljesül, hogy
$$0 + a = a + 0 = a, \quad \text{ha} \quad a \in \mathbb{R}.$$
3. Minden $a \in \mathbb{R}$ számhoz létezik pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$, amelyre
$$x + a = a + x = 0.$$
Az így értelmezett x-et $(-a)$-val jelöljük. (Neve: additív inverz.)
4. $a + b = b + a, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$-re (az összeadás *kommutatív*)

$\cdot$ művelet tulajdonságai (5–8.).

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (a szorzás *asszociatív*)
6. Létezik egyetlen szám, amelyet 1-gyel jelölünk ($1 \neq 0$), amelyre teljesül, hogy
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad \text{ha} \quad a \in \mathbb{R}$$
7. Minden $a \neq 0$-hoz létezik egyetlen $x \in \mathbb{R}$, amelyre
$$x \cdot a = a \cdot x = 1$$
Az így értelmezett x-et az $a \neq 0$ szám reciprokának nevezzük, és $\dfrac{1}{a}$-val jelöljük.
8. $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (a szorzás *kommutatív*)

A két műveletre (+ és ·)-ra együttesen érvényes tulajdonság (9.).

9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad$ (*disztributívitás*)

1.2. Rendezési axiómák (10–13.)

10. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számpárra az

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b$$

relációk közül pontosan egy teljesül (trichotom tulajdonság).

11. Ha $a < b$ és $b < c$ (röviden $a < b < c$), akkor $a < c$, $\quad (\forall a,b,c \in \mathbb{R})$ (tranzitívitás)

12. Ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$, $\quad (\forall a,b,c \in \mathbb{R}) \quad$ (a rendezés *monoton*).

13. Ha $a < b$ és $c > 0$, akkor $a \cdot c < b \cdot c$, $\quad (\forall a,b,c \in \mathbb{R})$.

1.3. Archimédesz-féle axióma (14.)

14. Tetszőleges $b > 0$ számhoz található b-nél nagyobb n természetes szám.

1.4. Cantor-féle axióma (15.)

15. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számnak megfeleltetünk egy $I_n = \{x : a_n \le x \le b_n, \ x \in \mathbb{R}\}$ halmazt (röviden $[a_n, b_n]$ zárt intervallumot) oly módon, hogy

$$a_n \le a_{n+1}, \quad b_{n+1} \le b_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

akkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ne \emptyset$$

Vagyis: egymásba skatulyázott *zárt* intervallumsorozat elemeinek metszete nem üres. $(\exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \xi \in \mathbb{R})$

(M) Zártság fontos! $(I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right]$ esetén $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset)$

2. A rendezési axiómákból levezethető

A rendezésre vonatkozóan könnyű belátni, hogy igazak az alábbi állítások (szokás ezeket az „egyenlőtlenségekkel való számolás szabályai"-nak is nevezni):

1. Minden $a \in \mathbb{R}$ számra az

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0$$

tulajdonságok közül pontosan egy teljesül. $(a > 0 \iff (-a) < 0)$

2. $(a < b) \wedge (c < d) \implies a + c < b + d$
Speciálisan: $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies a + b > 0$

3. $(0 \le a < b) \wedge (0 \le c < d) \implies ac < bd$
Speciálisan: $(a > 0) \wedge (b > 0) \implies ab > 0$

4. $(a < b) \wedge (c < 0) \implies ac > bc$
Speciálisan: $a < b \implies -a > -b$

5. $0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a < b < 0 \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

$a < 0 < b \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

$$a < b \implies \begin{cases} ab > 0: & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \\ ab < 0: & \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \end{cases}$$

6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén
$|a + b| \le |a| + |b|$ és
$||a| - |b|| \le |a - b|$.

7. Ha n pozitív egész szám, és $0 < a < b$, akkor $a^n < b^n$.

Hasonlóan következnek az abszolútérték tulajdonságai.

3. Néhány fogalom

$H \subset \mathbb{R}$

(D) H felülről korlátos, ha $\exists k_f \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in H: \ x \le k_f$. $\quad$ (k_f: felső korlát)

(D) H alulról korlátos, ha $\exists k_a \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in H: \ k_a \le x$. $\quad$ (k_a: alsó korlát)

(D) H korlátos, ha felülről is és alulról is korlátos, tehát $\exists k: \ |x| \le k$.

(D) A felülről korlátos H halmaz legkisebb felső korlátját szuprémumnak (felső határnak) nevezzük.

Jele: $\sup H$.

(D) Az alulról korlátos H halmaz legnagyobb alsó korlátját infimumnak (alsó határnak) nevezzük.

Jele: $\inf H$.

(Pl.) $H = \{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, \dots\}$ esetén:

Felső korlátok például: $1, 3, \pi, \dots$
Alsó korlátok például: $0, -2, -56, \dots$
$\sup H = 1$ (nincs a halmazban legnagyobb elem), $\inf H = 0$ (= legkisebb elem)

Dedekind folytonossági tétel:

(T) $\boxed{\text{Felülről korlátos nem üres számhalmaznak mindig van szuprémuma. } (\neg B)}$

Ebből következik:
Alulról korlátos nem üres számhalmaznak mindig van infimuma.

(M) A fenti axiómarendszerben a Cantor-féle axióma lecserélhető ezzel az állítással.

•••

II. rész
Számsorozatok

A valós számsorozat a természetes számokon értelmezett valós értékű függvény:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

az n helyen felvett értéke $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, \dots$.
A számsorozat jelölése:

(a_n), vagy $\langle a_n \rangle$, vagy a_n, $n = 1, 2, \dots$.

(D) (a_n) felülről korlátos, ha $\exists\, k_f$: $\forall\, n$-re: $a_n \le k_f$.

(D) (a_n) alulról korlátos, ha $\exists\, k_a$: $\forall\, n$-re: $k_a \le a_n$.

(D) (a_n) korlátos, ha alulról is és felülről is korlátos, tehát $\exists\, k$:
$|a_n| \le k \quad (k = \max\{|k_a|, |k_f|\})$.
Vagyis a fenti definíciók szerint ilyenkor $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete korlátos.

Számsorozat konvergenciája:

(D) Azt mondjuk, hogy (a_n) konvergens és határértéke (limesze) $A \in \mathbb{R}$, jelben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

$N(\varepsilon)$ neve: küszöbindex, küszöbszám

(M_1) A definícióval ekvivalens:
$\forall\, \varepsilon > 0$-ra az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumon kívül a sorozatnak véges sok eleme van.
(Az intervallumon belül pedig végtelen sok eleme van.)

(M_2) A határérték egyértelmű.

•••

Az alábbi példáknál a definíció segítségével bizonyítsuk be, hogy a megadott A a számsorozat határértéke!

(Pl.) $A = 0$, ha
a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Megoldás:
Mindkét esetben:

$$|a_n - A| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \ge \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

Például $\varepsilon = 0,001$ esetén $N = 1000$ választás megfelelő.

(Pl.) $a_n = \dfrac{6+n}{5,1-n}$, $A = -1$

Megoldás:

$$|a_n - A| = \left|\frac{6+n}{5,1-n} - (-1)\right| = \left|\frac{11,1}{5,1-n}\right| \underbrace{=}_{n>5} \frac{11,1}{n-5,1} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad n > 5,1 + \frac{11,1}{\varepsilon}$$

Ezért $\quad N(\varepsilon) \geq \left[5,1 + \dfrac{11,1}{\varepsilon}\right].$

(Pl.) $\boxed{a_n = \dfrac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8}, \qquad A = 0}$

Megoldás:

$$|a_n - A| = \left|\frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8}\right| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \varepsilon$$

Ezt az egyenlőtlenséget nem tudjuk megoldani n-re. Azonban nem szükséges a lehető legkisebb küszöbindex előállítása. Elegendő megmutatnunk, hogy létezik küszöbindex. Ezért a megoldáshoz felhasználhatjuk az egyenlőtlenségek tranzitív tulajdonságát, például az alábbi módon:

$$|a_n - A| = \frac{n^2 - 1}{2n^5 + 5n + 8} < \frac{n^2 - 0}{2n^5 + 0 + 0} = \frac{1}{2\,n^3} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{1}{2\,\varepsilon}}$$

Ezért $\quad N(\varepsilon) \geq \left[\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\,\varepsilon}}\right].$

(Pl.) $\boxed{a_n = \dfrac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5}, \qquad A = 4}$

Megoldás:

$$|a_n - A| = \left|\frac{8n^4 + 3n + 20}{2n^4 - n^2 + 5} - 4\right| = \left|\frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5}\right| =$$

$$= \frac{4n^2 + 3n}{2n^4 - n^2 + 5} < \frac{4n^2 + 3n^2}{2n^4 - n^4 + 0} = \frac{7}{n^2} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{7}{\varepsilon} < n^2$$

Innen $\quad N(\varepsilon) \geq \left[\sqrt{\dfrac{7}{\varepsilon}}\right].$

Számsorozat divergenciája:

A nem konvergens számsorozatokat divergens számsorozatnak nevezzük. Ennek két fontos speciális esete a $+\infty$-hez és a $-\infty$-hez divergáló számsorozat.
A megfelelő definíciók:

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
ha $\forall P > 0$-hoz $(P \in \mathbb{R})$ $\exists N(P) \in \mathbb{N}$, hogy

$$a_n > P, \quad \text{ha } n > N(P)$$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$,
ha $\forall M < 0$-hoz $(M \in \mathbb{R})$ $\exists N(M) \in \mathbb{N}$, hogy

$$a_n < M, \quad \text{ha } n > N(M)$$

Ez a definíció megfogalmazható $M > 0$ feltétellel is:

$$\forall M > 0\text{-hoz } \exists N(M) \in \mathbb{N}: \quad a_n < -M, \text{ ha } n > N(M)$$

(Pl.) $\boxed{a_n = 2n^3 + 3n + 5 \qquad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty!}$

Megoldás:

$$a_n = 2n^3 + 3n + 5 > 2n^3 > P \quad \Longrightarrow \quad n > \sqrt[3]{\frac{P}{2}} \quad \Longrightarrow \quad N(P) \geq \left[\sqrt[3]{\frac{P}{2}}\right]$$

(Pl.) $\boxed{a_n = \dfrac{6 - n^2}{2 + n} \qquad \text{Bizonyítsa be, hogy } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty!}$

Megoldás:

Teljesítendő, hogy $\quad a_n = \dfrac{6 - n^2}{2 + n} < M \ (< 0)$, ha $\ n > N(M)$.

Ez egyenértékű a következő feltétellel:

$(-a_n =) \ \dfrac{n^2 - 6}{2 + n} > -M \ (> 0)$, ha $\ n > N(M)$. A feladatot egyszerűsítjük, hiszen most sem a legkisebb küszöbindexet keressük:

$$\frac{n^2 - 6}{2 + n} \underbrace{>}_{n \geq 4 \text{ esetén } \frac{n^2}{2} > 6} \frac{n^2 - \dfrac{n^2}{2}}{2n + n} = \frac{n}{6} > -M \quad \Longrightarrow \quad n > -6M$$

Ezért $N(M) \geq \max\{4, [-6M]\}$.

Binomiális együttható, binomiális tétel, Bernoulli-egyenlőtlenség: ...
(L. gyakorlat!)

A határérték egyértelműsége

(T) $\boxed{\text{Ha } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \text{ és } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = B\,, \text{ akkor } A = B\,.}$

(B) Indirekt módon bizonyítunk. Tehát feltesszük, hogy $A \neq B$, például $A < B$.

Legyen $d = B - A > 0$ és $\varepsilon = \dfrac{d}{3} > 0$!

A számsorozat konvergenciája miatt létezik $N_1(\varepsilon)$ és $N_2(\varepsilon)$, hogy

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon\,, \quad \text{ha } n > N_1(\varepsilon)\,,$$
$$B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon\,, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon)\,.$$

De ekkor $\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ esetén:

$$a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < a_n$$

Ez pedig ellentmodás, tehát nem igaz, hogy $A \neq B$, vagyis $A = B$. ∎

A konvergencia szükséges feltétele

P $\Longrightarrow$ Q, a P állításból következik a Q állítás. Ezt kétféleképpen is megfogalmazhatjuk:

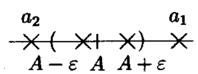
1. P elégséges feltétele Q-nak,
2. Q szükséges feltétele P-nek.

(T) $\boxed{\begin{array}{l} (a_n) \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad (a_n) \text{ korlátos} \\ \text{(Tehát a korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.)} \end{array}}$

(B) $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists N(\varepsilon)$:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon\,, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) = N$$

Tehát $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$- on kívül legfeljebb csak az $a_1, a_2, \ldots, a_N$ elemek eshetnek.



$$\Longrightarrow \begin{cases} \exists k_a \;:\; \forall n\text{-re } k_a \leq a_n & k_a = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A - \varepsilon\} \\ \exists k_f \;:\; \forall n\text{-re } a_n \leq k_f & k_f = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N, A + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Így $\exists K:\ |a_n| \leq K$, tehát korlátos. ∎

(M) $\Longleftarrow$ nem igaz. (Az állítás nem megfordítható.)

Példa: $a_n = (-1)^n$ korlátos, de nem konvergens.

(Pl.) Konvergens-e az alábbi sorozat:

$$a_n = \begin{cases} 2n + 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \dfrac{1}{3n^2+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}.$$

Nem konvergens, mert nem korlátos. ($a_{2m} = 2 \cdot 2m + 1 = 4m + 1 \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$-re ellentmond az Archimédesz-féle axiómának.)

Műveletek konvergens számsorozatokkal

(T_1) $\boxed{(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \quad \Longrightarrow \quad (a_n + b_n \to A + B)}$

(B) $\exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, hogy

$$\left.\begin{array}{ll} & |a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \text{és} & |b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Ha } n > \max\left\{N_1\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right\}, \text{ akkor}$$

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$N(\varepsilon) = \max\left\{N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

∎

(T_2) $\boxed{(a_n \to A) \quad \Longrightarrow \quad (c\,a_n \to c\,A)}$

(B)

(i) $c = 0$ esetén az állítás igaz.

(ii) $c \neq 0$ esetén:

$$\exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right), \quad \text{hogy} \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)$$

$$\Longrightarrow |ca_n - cA| = |c|\,|a_n - A| < |c|\,\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \quad \forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right) = N(\varepsilon)$$

■

Következmény:

(i) $(a_n \to A) \implies (-a_n \to -A)$ (Most $c = -1$)

(ii) $(a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \implies (a_n - b_n) \to (A - B)$ (T_1, T_2-ből következik)

(T_3)
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(i) } (a_n \to 0) \wedge (b_n \to 0) \implies a_n b_n \to 0 \\ \text{(ii) } (a_n \to A) \wedge (b_n \to B) \implies a_n b_n \to AB\end{array}}$$

(B)

(i) $\exists N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ és $N_2(2)$, hogy

$$\left.\begin{array}{l}|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = N_1 \\ |b_n - 0| < 2 \quad \forall n > N_2(2) = N_2 \quad (\varepsilon = 2 \text{ most })\end{array}\right\} \implies$$

Ha $n > \max\{N_1, N_2\}$, akkor $|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$.

(ii) Mivel a $c_n \equiv A$ $\forall n$-re (stagnáló sorozat) $\to A$, ezért

$$(a_n - A \to A - A = 0) \wedge (b_n - B \to B - B = 0).$$

T_3 (i)-et alkalmazva kapjuk: $(a_n - A) \cdot (b_n - B) \to 0$, vagyis

$$a_n b_n - Ab_n - Ba_n + AB \to 0.$$

Ekkor

$$a_n b_n = \underbrace{(a_n b_n - Ab_n - Ba_n + AB)}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{(Ab_n + Ba_n - AB)}_{\downarrow \atop AB + AB - AB} \to AB$$

■

(M) Nyilván három konvergens sorozat szorzata az egyes határértékek szorzatához konvergál. Teljes indukcióval belátható, hogy véges sok konvergens sorozat szorzata is az egyes sorozatok határértékének szorzatához konvergál. Hasonlóan általánosítható T_2 véges sok konvergens sorozat összegére.

($T_{3'}$) $\boxed{(a_n \to 0) \wedge (b_n \text{ korlátos}) \implies a_n b_n \to 0}$

Az előző bizonyítások megértése után próbálja meg bebizonyítani a tételt! (A bizonyítás az előadáson szerepel.)

(T_4) $\boxed{(a_n \to A) \implies (|a_n| \to |A|)}$

■

(B) $||a_n| - |A|| \le |a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$.

(M) $(|a_n|)$ kovergenciájából általában nem következik (a_n) konvergenciája. (Pl. $a_n = (-1)^n$ divergens, de $|a_n| = 1^n = 1 \to 1$).

Speciálisan azonban igaz: $|a_n| \to 0 \implies a_n \to 0$.
Ugyanis

$$|\,|a_n| - 0\,| = |\,a_n\,| = |\,a_n - 0\,| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon)$$

(T_5)
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(i) } (b_n \to B \neq 0) \implies \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B} \\ \text{(ii) } (b_n \to B \neq 0) \wedge (a_n \to A) \implies \frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}\end{array}}$$

(B)

(i) Mivel T_4 szerint $|b_n| \to |B|$, ezért $\exists N_1\left(\frac{|B|}{2}\right) = N_1$, hogy

$$||b_n| - |B|| < \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

azaz

$$|B| - \frac{|B|}{2} < |b_n| < |B| + \frac{|B|}{2}, \quad \text{ha } n > N_1$$

vagyis

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}, \quad \forall n > N_1.$$

Másrészt $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}|B|^2\right) = N_2$, hogy

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}|B|^2, \quad \forall n > N_2.$$

Így ha $n > \max\{N_1, N_2\} = N(\varepsilon)$, akkor:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{B \cdot b_n}\right| = \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot |b_n|} < \frac{|B - b_n|}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}|B|^2}{|B| \cdot \frac{|B|}{2}} = \varepsilon$$

(ii) $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$ $\quad$ T_3 és T_5 (i) miatt.

■

Néhány példa az előző tételek alkalmazására:

Pl. $\boxed{a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{500}{n^2}} \to \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{500\text{ db}} = 0$

A tagok száma 500 (n-től független!), ezért T_1 véges sokszori alkalmazásával a 0 eredmény helyesnek adódik.

Pl. $\boxed{b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}} \to 0 + \cdots + 0 = 0$ $\quad$ HIBÁS gondolatmenet!!!

A tagok száma itt függ n-től, ez nem véges sok sorozat összege, így a T_1 tétel erre már nem terjeszthető ki. Helyesen:

$$b_n = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \frac{(1+n) \cdot \frac{n}{2}}{n^2} = \frac{1+n}{2n} = \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} \to \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Pl. $\boxed{a_n = \frac{8n^2 - n + 3}{n^2 + 9}} = \underbrace{\frac{n^2}{n^2}}_{=1} \frac{8 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^2}} \to \frac{8 - 0 + 0}{1 + 0} = 8$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{2n+1}{3-n}\right)^3 \frac{3n^2 + 2n}{2 + 6n^2}}$

$$a_n = \underbrace{\left(\frac{2n}{-n}\right)^3}_{=-8} \left(\frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{3}{n}}\right)^3 \underbrace{\frac{3n^2}{6n^2}}_{=\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{2}{3n}}{1 + \frac{1}{3n^2}} \to -8 \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = -4$$

M A hatványozásnál a szorzatra vonatkozó tételt alkalmaztuk.

Pl. $\boxed{a_n = \underbrace{\frac{n^2 - 5}{2n^3 + 6n}}_{b_n} \underbrace{\sin(n^4 + 5n + 8)}_{c_n}} \to 0,$ mert

$$b_n = \underbrace{\frac{n^2}{2n^3}}_{=\frac{1}{2n} \to 0} \frac{1 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \to 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{és } c_n \text{ korlátos.}$$

●●●

Néhány jól használható egyszerűbb tétel

T $\boxed{(a_n \geq 0) \wedge (a_n \to A \geq 0) \implies (\sqrt{a_n} \to \sqrt{A})}$

B

(i) $A = 0$ esete:

$\left|\sqrt{a_n} - 0\right| = \sqrt{a_n} < \varepsilon,$ ha $n > N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^2)$ $\quad \Longleftarrow \quad \begin{cases} 0 \leq a_n < \varepsilon^2, \text{ ha } n > N_a(\varepsilon^2) \\ (a_n \to 0 \text{ miatt } \exists N_a(\varepsilon^2)) \end{cases}$

(ii) $A > 0$ esete:

$a_n \to A$ miatt $\exists N_a(\varepsilon\sqrt{A})$:

$|a_n - A| < \varepsilon \cdot \sqrt{A}$, ha $n > N_a\left(\varepsilon\sqrt{A}\right)$

De ekkor

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| = \left|\frac{a_n - A}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}\right| \leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon, \text{ tehát } N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon\sqrt{A})$$

■

M $a_n \geq 0,\ a_n \to A \implies \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{A}$ tetszőleges rögzített $k \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Speciálisan: $\sqrt[3]{a_n} \to \sqrt[3]{A}$ (bizonyítása HF).

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 1} - \sqrt{4n^2 + n + 3}}$ $\quad$ ($\infty - \infty$ alakú)

$$a_n = \frac{4n^2+5n-1-(4n^2+n+3)}{\sqrt{4n^2+5n-1}+\sqrt{4n^2+n+3}} = \frac{4n-4}{\sqrt{4n^2+5n-1}+\sqrt{4n^2+n+3}} =$$

$$= \underbrace{\frac{4n}{\sqrt{4n^2}}}_{=\frac{4n}{2n}=2} \quad \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{4n}-\frac{1}{4n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}+\frac{3}{4n^2}}} \quad \to \quad 2\cdot\frac{1}{1+1}=1$$

Feladatok

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{3n^2+8}}=?$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+5n}-\sqrt{2n^2+3}\right)=?$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+4}\right)=?$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2n^4+n^3-2n^2+8}}{\sqrt[3]{n^6+5n^2+3}}=?$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+4n^2-n}-\sqrt{n^4-n^2-n+1}\right)=?$

•••

(T) $\boxed{(a_n\to\infty) \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{1}{a_n}\to 0\right)}$

(B) Tudjuk, hogy $\exists\, N_a(P)$:

$$a_n > P > 0\,, \quad \text{ha } n > N_a(P).$$

Tehát $\dfrac{1}{P} > \dfrac{1}{a_n} > 0\,,$ ha $n > N_a(P)$. $\quad P=\dfrac{1}{\varepsilon}$ választással kapjuk, hogy

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon\,, \quad \text{ha } n > N_a(P).$$

Vagyis

$$\left|\frac{1}{a_n}-0\right| < \varepsilon\,, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) = N_a(P).$$

($a_n > 0$ feltehető, hiszen csak véges sok negatív elem lehet. Ezek elhagyhatók.) ■

(Pl.) $\boxed{(a_n\to 0) \quad\overset{?}{\Longrightarrow}\quad \left(\frac{1}{a_n}\to\infty\right)}$

Nem következik!
Például

$$a_n = \frac{-2}{n} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = -\frac{n}{2} \to -\infty$$

Vagy például

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{esetén} \quad \frac{1}{a_n} = (-1)^n n^2 := b_n$$

$$b_{2m}\to\infty, \quad b_{2m+1}\to-\infty. \qquad \text{Tehát} \quad \frac{1}{a_n}\not\to\infty.$$

De igaz:

$$((a_n>0)\wedge(a_n\to 0)) \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{1}{a_n}\to\infty\right)$$

$$((a_n<0)\wedge(a_n\to 0)) \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{1}{a_n}\to-\infty\right)$$

(T) $\boxed{(a_n\to 0) \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{1}{|a_n|}\to\infty\right)}$

(B) Tudjuk, hogy $\exists\, N_a(\varepsilon)$:

$$|a_n-0| = |a_n| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_a(\varepsilon).$$

Vagyis $\dfrac{1}{|a_n|} > \dfrac{1}{\varepsilon} = P\,,$ ha $\quad n > N_a(\varepsilon) = N(P).$ ■

•••

További hasonló tételek bizonyíthatók:

Pl. $\quad \dfrac{0}{\infty}\to 0 \quad$ (Jelentése: $a_n\to 0\,,\ b_n\to\infty$ esetén $\dfrac{a_n}{b_n}\to 0$)

$$\left(\text{sőt} \quad \frac{\text{korlátos}}{\infty}\to 0\,;\right) \quad \frac{\infty}{+0}\to\infty\,; \quad \infty+\infty\to\infty\,; \quad \infty\cdot\infty\to\infty$$

(Felhasználhatók bizonyítás nélkül.)

Határozatlan alakok:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad \infty-\infty;\quad 1^{\infty};\quad \infty^0;\quad 0^0$$

Ilyen esetekben azonos átalakítással próbálkozunk, ill. később kapunk egy segédeszközt (L'Hospital szabály).

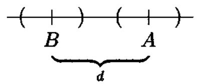
A limesz monoton:

Ⓣ $\boxed{(a_n \to A,\quad b_n \to B,\quad a_n < b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^+) \quad\Longrightarrow\quad (A \le B)}$

M_1 $a_n \to A,\quad b_n \to B,\quad a_n \le b_n$ esetén is igaz az állítás.

M_2 $a_n \to A,\quad b_n \to B,\quad a_n \le b_n$, ha $n > N_1$ ($\exists$ ilyen N_1) feltétel is elég.

Ⓑ Megmutatjuk, hogy $A > B$ nem lehet, így a trichotom tulajdonság miatt $A \le B$.



Ha $A > B$ lenne, akkor pl. $\varepsilon := \dfrac{d}{3}\left(= \dfrac{A-B}{3} > 0\right)$-hoz $\exists\, N_a, N_b$:

$$\left.\begin{array}{l} \forall n > N_a(\varepsilon)\text{-ra } |a_n - A| < \varepsilon \\ \forall n > N_b(\varepsilon)\text{-ra } |b_n - B| < \varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a_n > b_n, \text{ ha } n > \max\{N_a, N_b\} \\ \text{Ez pedig a feltétel miatt nem lehetséges.} \end{array}$$

■

Rendőrelv:

Ⓣ
$$\boxed{\left(\begin{array}{lcl} a_n \to A & \text{és} & a_n \le c_n \le b_n \\ b_n \to A & & \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right) \Longrightarrow (c_n \to A)}$$

Ⓑ $N(\varepsilon) := \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$

Ha $n > N(\varepsilon)$:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \quad \text{és} \quad A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad A - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < A + \varepsilon.$$

Tehát $c_n \to A$. ■

Speciális rendőrelv:

Ⓣ
$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{(i)}\ (a_n \ge b_n) \wedge (b_n \to \infty) & \Longrightarrow & a_n \to \infty \\ \text{(ii)}\ (a_n \le b_n) \wedge (b_n \to -\infty) & \Longrightarrow & a_n \to -\infty \end{array}}$$

Ⓑ L. gyakorlat

•••

Néhány nevezetes számsorozat (L. gyakorlat illetve előadás)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |a| < 1, \\ 1, & \text{ha } a = 1, \\ \infty, & \text{ha } a > 1, \\ \text{oszcillálóan divergens egyébként.} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0, \text{ ha } |a| < 1 \text{ és } k \in \mathbb{N}^+ \qquad (\neg B)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \text{ ha } p > 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \qquad (\neg B)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = \infty.$$

•••

Néhány példa az előző tételek alkalmazására:

Pl. $\boxed{a_n = \dfrac{3n^5 + n^2 - n}{n^3 + 3}} > \dfrac{3n^5 + 0 - n^5}{n^3 + 3n^3} = \dfrac{n^2}{2} \to \infty \quad\Longrightarrow\quad a_n \to \infty$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{n^5}{n^3}\ \underbrace{\frac{3 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{3}{n^3}}}_{c_n} > n^2 \cdot 2 \to \infty \quad\Longrightarrow\quad a_n \to \infty$$

Felhasználtuk, hogy

$$c_n \to 3 \quad\Longrightarrow\quad \exists\, N_0 : c_n > 2, \text{ ha } n > N_0$$

Ⓜ Persze belátható lenne, hogy $b_n \to \infty$, $c_n \to C > 0$ esetén $b_n c_n \to \infty$. Mi azonban ezt nem bizonyítottuk be, ezért nem használhatjuk fel a megoldásnál.

(Pl.) $\boxed{a_n = \dfrac{1}{n^4+3} \cos(n^7 - 5)} \to 0$, mert

$$\underbrace{\frac{1}{n^4+3} \cdot (-1)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \le a_n \le \underbrace{\frac{1}{n^4+3} \cdot 1}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$$\underset{\text{a rendőrelv miatt}}{\Longrightarrow} \qquad a_n \to 0\,.$$

Másik megoldás: egy nuullsorozat és egy korlátos sorozat szorzatáról van szó, így egy korábbi tétel miatt a szorzat is nullsorozat.

(Pl.) $\boxed{a_n = \dfrac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}}} = \underbrace{\dfrac{9^n}{4^n}}_{=\left(\frac{9}{4}\right)^n \to \infty} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n}}_{\to 1}$

Tehát $+\infty$ határértéket várunk, ezért a speciális rendőrelvet használjuk:

$$a_n > \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{1+3\cdot 1} \to \infty$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to \infty\,.$$

(Pl.) $\boxed{a_n = \dfrac{2^{2n} + (-3)^{n-1}}{5^{n+2} + 7^{n+1}}} = \dfrac{4^n - \frac{1}{3}\cdot(-3)^n}{25 \cdot 5^n + 7 \cdot 7^n} =$

$$= \underbrace{\frac{4^n}{7^n}}_{=\left(\frac{4}{7}\right)^n \to 0} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^n}{25 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n + 7} \to 0 \cdot \frac{1-0}{0+7} = 0$$

(Pl.) $\boxed{a_n = \dfrac{n^2 + 9^{n+1}}{2\,n^5 + 3^{2n-1}}} = \dfrac{n^2\left(\frac{1}{9}\right)^n + 9}{2\,n^5\left(\frac{1}{9}\right)^n + \frac{1}{3}} \to \dfrac{0+9}{0+\frac{1}{3}} = 27$

(Pl.) Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+100}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$a_n \to \underbrace{0+0+\ldots 0}_{100\ darab} = 0$

A (b_n) sorozatnál már nem alkalmazható az előbbi módszer, mivel az egyes tagok ugyan nullához tartanak, de a tagok száma végtelenhez tart ($\infty \cdot 0$ alakú). A rendőrelv segítségével tudjuk megoldani a feladatot.

$$\underbrace{\frac{n}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = n\,\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < b_n < n\,\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \underbrace{\frac{n}{n}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\Longrightarrow \quad b_n \to 1\,.$$

(Pl.) Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$!

Ha $a = 0$: triviálisan igaz.

Ha $0 < a < 1$: $\dfrac{0}{\infty}$ alakú, ezért 0-hoz tart a sorozat.

Ha $a = 1$: $\dfrac{1}{n!} \to 0$.

Ha $a > 1$: $n > [a]$ esetén

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot 1\cdot 1\cdots 1\,\frac{a}{n} = \frac{a^{[a]}}{[a]!}\,\frac{a}{n} = \underbrace{\frac{konstans}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a^n}{n!} \to 0\,.$$

Ha $a<0$:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{(-1)^n\,|a|^n}{n!} = \underbrace{(-1)^n}_{\text{korlátos}}\ \underbrace{\frac{|a|^n}{n!}}_{\to 0} \quad\to\quad 0$$

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt[3n]{n}} = \dfrac{\sqrt[3n]{3n}}{\sqrt[3n]{3}} \quad\to\quad \dfrac{1}{1} = 1$

Ugyanis az $\sqrt[n]{n}$ és az $\sqrt[n]{p}$ $(p=3)$ részsorozatairól van szó.

Másik megoldás: $a_n = \sqrt[3n]{n} = \sqrt[3]{\sqrt[n]{n}} \quad\to\quad \sqrt[3]{1} = 1$

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2n^5+5n}{8n^2-2}}} \quad\to\quad 1\,,$ mert

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{4}}\ \left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{1\cdot 1^3=1} = \sqrt[n]{\frac{2n^5}{8n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{2n^5+5n}{8n^2-2}} \le \sqrt[n]{\frac{2n^5+5n^5}{8n^2-2n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{7}{6}}\ \left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{1\cdot 1^3=1}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

Pl. $\boxed{a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n+5^n}{2^n+4^n}}}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\ \frac{5}{4}}_{\frac{5}{4}} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n+4^n}} < \sqrt[n]{\frac{3^n+5^n}{2^n+4^n}} < \sqrt[n]{\frac{5^n+5^n}{4^n}} = \underbrace{\sqrt[n]{2}\ \frac{5}{4}}_{\frac{5}{4}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to \frac{5}{4}\,.$$

Elégséges tétel (a_n) konvergenciájára:

T

(i) Ha (a_n) monoton növekedő és felülről korlátos, akkor konvergens.
(ii) Ha (a_n) monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens.

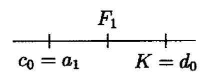
B Monoton növekedő esetre.

Felveszünk egy $I_n = [c_n, d_n]$ egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozatot, ahol
c_n: mindig a számsorozat egy eleme és
d_n: mindig felső korlát.

Így az (a_n) sorozat elemei véges sok elem kivételével a $[c_n, d_n]$-ben vannak. A Cantor axióma szerint az I_n intervallumok metszete nem üres. Választunk a metszetből egy elemet, erről belátjuk, hogy a számsorozat határértéke. Mivel a határérték egyértelmű, azt is beláttuk, hogy ebben a speciális intervallumsorozatban egyetlen közös elem van, mert az intervallumok hossza 0-hoz tart.

Részletesen:

$a_1 \le a_n \le K \quad \exists\, K$ (a korlátosság miatt)
$I_0 = [c_0, d_0] := [a_1, K]$



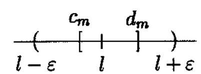
$$F_1 := \frac{c_0 + d_0}{2}$$

Ha F_1 felső korlát, akkor $c_1 = c_0,\ d_1 = F_1,\quad I_1 = [c_1, d_1] := [c_0, F_1]$
Ha F_1 nem felső korlát: $\exists\, a_{n_1} > F_1$ és ekkor $c_1 = a_{n_1}, d_1 = d_0,\quad I_1 = [c_1, d_1] := [a_{n_1}, d_0]$

$$F_2 := \frac{c_1 + d_1}{2}$$

Ha F_2 felső korlát: $I_2 = [c_2, d_2] := [c_1, F_2]$
Ha F_2 nem felső korlát: $\exists\, a_{n_2} > F_2$ és ekkor $I_2 := [a_{n_2}, d_1]$.
Stb.

$\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n \ne \emptyset$ (Cantor axióma), tehát $\exists\, l \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.
Belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.



I_n hossza: $\quad d_n - c_n \le \dfrac{K - a_1}{2^n} < \varepsilon\,,$ ha $\quad n > N(\varepsilon)$. Az előzőek miatt

$$0 < l - c_n \le d_n - c_n < \varepsilon \quad \text{és} \quad 0 < d_n - l \le d_n - c_n < \varepsilon\,, \quad \text{vagyis}$$
$$l - \varepsilon < c_n \le d_n < l + \varepsilon\,, \text{ ha } \quad n > N(\varepsilon).$$

Mivel $c_m = a_{n_m}$ és $(a_n) \nearrow$:

$$c_m = a_{n_m} \le a_n, \text{ ha } n > n_m \quad \text{és} \quad a_n \le d_m \text{ (felső korlát) } \forall n \implies$$

$$l - \varepsilon < c_m = a_{n_m} \le a_n \le d_m < l + \varepsilon, \text{ ha } \quad n > n_m = N(\varepsilon)$$

Tehát valóban $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. ∎

•••

Példák rekurzív sorozatokra

A rekurzív megadású számsorozatok konvergenciája sok esetben vizsgálható az előző elégséges tétel alkalmazásával. Erre mutatunk most néhány példát.

Pl. $\boxed{a_1 = \frac{4}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}; \quad n = 1, 2, \dots}$
Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

$$a_1 = 1{,}33 > a_2 = \frac{3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} = 1{,}194 > a_3 = 1{,}1067$$

Sejtés: $(a_n) \searrow$.
Bizonyítás: teljes indukcióval.

1. $a_1 > a_2 > a_3$ teljesül
2. Tfh. $a_{n-1} > a_n$
3. Igaz-e:

$$\frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n \overset{?}{>} a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}$$

2. miatt $\quad a_{n-1} > a_n \ge \frac{3}{4} > 0$

$$\implies a_{n-1}^2 > a_n^2 \implies 3 + a_{n-1}^2 > 3 + a_n^2$$

$$\implies \frac{3 + a_{n-1}^2}{4} = a_n > a_{n+1} = \frac{3 + a_n^2}{4}$$

Tehát a számsorozat monoton csökkenő és alulról korlátos (hiszen $a_n > 0$)

$\implies (a_n)$ konvergens, és fennáll:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + a_{n-1}^2}{4}$$

$$A = \frac{3 + A^2}{4} \implies A^2 - 4A + 3 = 0 \implies A = 1 \text{ vagy } A = 3.$$

$A = 3$ nem lehet, mivel $a_n < a_1 = \frac{4}{3}$, ezért a_n nem esik a 3 szám pl. 1 sugarú környezetébe. Így $\quad A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Pl. $\boxed{a_1 = 1; \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}; \quad n = 1, 2, \dots}$
Konvergens-e a sorozat? Ha igen, mi a határértéke?

$(a_n) = (1,\ 2{,}646,\ 2{,}94, \dots)$

$\sqrt{6 + a_n} \ge 0$ miatt a sorozat elemei pozitívak ((ii)-ben precízen megmutatjuk).

(i) Ha a sorozat konvergens lenne, akkor létezne

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_{n-1}} = \sqrt{6 + A}, \text{ vagyis } \quad A^2 - A - 6 = 0.$$

Ebből $A = 3$ vagy $A = -2$ lehetne. $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}} > 0$ miatt $A = -2$ nem lehet. Így csak az $A = 3$ jöhet szóba.

(ii) Sejtés: $(a_n) \nearrow$.
Bizonyítás: teljes indukcióval. (Egyidejűleg belátjuk, hogy $a_n > 0$.)

$0 < a_1 < a_2 < a_3$ igaz.
Tegyük fel, hogy $\quad 0 < a_{n-1} < a_n$.
Igaz-e, hogy

$$0 \overset{?}{<} \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

Az indukciós feltevés miatt $\quad 0 < a_{n-1} < a_n$

$$\implies 0 < 0 + 6 < 6 + a_{n-1} < 6 + a_n \quad (a_n > 0 \text{ miatt})$$

$$\implies 0 < \sqrt{6 + a_{n-1}} < \sqrt{6 + a_n}$$

Vagyis $\quad 0 < a_n < a_{n+1}$.

Tehát a sorozat monoton növekedő és elemei pozitívak.

(iii) Létezik-e K felső korlát? K-nak most célszerű A-t választani. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$a_1 < 3$ teljesül. Tegyük fel, hogy $a_n < 3$. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} < \sqrt{6+3} = 3.$$

Tehát (a_n) felülről korlátos.

(iv) Vagyis $(a_n) \nearrow \wedge (a_n)$ felülről korlátos $\Longrightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} a_n = A$.
Láttuk, hogy $A = 3$ lehet csak.

(M) A monotonitás másképpen is belátható:

$$0 < a_n \overset{?}{<} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$$

$$a_n^2 \overset{?}{<} 6 + a_n$$

$$a_n^2 - a_n - 6 \overset{?}{<} 0$$

Ez igaz, ha $-2 < a_n < 3$, de ezt még be kell bizonyítani. $-2 < a_n$ triviálisan igaz ($a_n > 0$ miatt), $a_n < 3$ pedig teljes indukcióval bizonyítandó.

(Pl.) $a_1 = -3; \qquad a_{n+1} = \dfrac{5 - 6a_n^2}{13}; \qquad n = 1, 2, \ldots$
Konvergens-e a sorozat?

Monoton csökkenő-e?

$a_{n+1} = \dfrac{5 - 6a_n^2}{13} \overset{?}{<} a_n$, amiből $\quad 6a_n^2 + 13a_n - 5 \overset{?}{>} 0$.

$$\left(6x^2 + 13x - 5 = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{5}{2}; \frac{1}{3}\right)$$

Tehát monoton csökkenő, ha $a_n < -\dfrac{5}{2}$, vagy $a_n > \dfrac{1}{3}$.

Most teljes indukcióval belátható, hogy $a_n \le -3 \quad \left(< -\dfrac{5}{2} \right)$ (HF.)

Tehát a sorozat monoton csökkenő a -3 kezdőértékkel.

Ha a sorozat alulról korlátos lenne, akkor konvergens lenne, és a határértéke:

$$A = \frac{5 - 6A^2}{13} \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{5}{2} \text{ vagy } A = \frac{1}{3} \text{ lehetne.}$$

Mivel most $a_n \le -3 \ \forall n$-re $\quad \Longrightarrow \quad (a_n)$ nem konvergens, vagyis alulról nem korlátos
$\Longrightarrow \quad \forall M$-hez $\exists n_0$, hogy $a_{n_0} < M$.
Mivel $(a_n) \searrow$, ezért $\quad a_n < a_{n_0} < M$, ha $n > n_0$, tehát $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

●●●

Egy kitüntetett számsorozat

(T) $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ korlátos és $\nearrow \quad \Longrightarrow \quad (e_n)$ konvergens.

(B)

1. Korlátosság (a binomiális tétel felhasználásával):

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{0<\cdots<1} \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{0<\cdots<1} \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{0<\cdots<1} \right) <$$

$$< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} := s_n$$

De (s_n) felülről korlátos, mert

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n} < 1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

Tehát $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$

2. (e_n) monoton nő:

$$e_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\right) =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{>1-\frac{1}{n}}\cdots\underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}_{>1-\frac{k-1}{n}}\right) + \binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} >$$

$$> 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) + 0 = e_n$$

Tehát $e_{n+1} > e_n$. Mivel $(e_n) \nearrow$ és korlátos $\Longrightarrow$ konvergens. ■

A sorozat határértékét e-vel jelöljük.

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

A fentiek miatt: $2 < e < 3$. Belátható, hogy e nem racionális szám, továbbá:

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Néhány e-vel kapcsolatos példa:

Pl. $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n^3+n+6}\right)^{n^3+n+6}} \to e$, ugyanis (e_n) egy részsorozatáról van szó.

Pl. $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n-6}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n-6}\right)^{n-6}\left(1+\frac{1}{n-6}\right)^6 \to e\cdot 1^6 = e$

Pl. $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{6n+1}\right)^{6n-7}} = \left(1+\frac{1}{6n+1}\right)^{6n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{6n+1}\right)^8} \to e\cdot\frac{1}{1^8} = e$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n-2}} = \left(\frac{n+4-1}{n+4}\right)^{n+4-6} =$

$$= \left(1+\frac{-1}{n+4}\right)^{n+4}\frac{1}{\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^6} \to e^{-1}\cdot\frac{1}{1^6} = \frac{1}{e}$$

$$\left(\text{Felhasználtuk, hogy}\quad \frac{n+4}{n+3} = \frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}} \to \frac{1+0}{1+0} = 1\right)$$

Másik megoldás:

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^2 \to \frac{e^3}{e^4}\cdot 1^2 = \frac{1}{e}$$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{n^2-2}{n^2+3}\right)^{n^2}} = \frac{\left(1+\frac{-2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{n^2}} \to \frac{e^{-2}}{e^3} = e^{-5}$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{n+1}{n+6}\right)^{2n}} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^n}\right)^2 \to \left(\frac{e^1}{e^6}\right)^2 = e^{-10}$

Pl. $\boxed{a_n = \left(\frac{2n+2}{2n+9}\right)^{2n}} = \frac{\left(1+\frac{2}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{9}{2n}\right)^{2n}} \to \frac{e^2}{e^9} = e^{-7}$

(Pl.)

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n^2}, \qquad b_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{9n^2}, \qquad c_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n^3}, \qquad d_n = \left(\frac{3n^2+1}{3n^2-2}\right)^{3n}$$

$$a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{3n^2}\right)^{3n^2}}{\left(1+\frac{-2}{3n^2}\right)^{3n^2}} \to \frac{e}{e^{-2}} = e^3 = A$$

$$b_n = (a_n)^3 \implies b_n \to A^3 = e^9$$

$$c_n = (a_n)^n > \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{8^n}\ , \text{ ha } n > N_1 \quad (a_n \to e^3 \text{ miatt } \exists\, N_1) \implies c_n \to \infty$$

$$d_n = \sqrt[n]{a_n} \implies \exists\, N_2 :\ n > N_2 \text{ esetén}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{e^3 - 0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \le d_n \le \underbrace{\sqrt[n]{e^3 + 0,1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

$$\implies d_n \to 1\,.$$

Feladatok

1. Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben azok léteznek!

   a) $a_n = \left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n+100}$

   b) $a_n = \left(\frac{n-2}{n+8}\right)^{n+7} (-1)^n$

   c) $a_n = \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n+8}$

   d) $a_n = \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n}, \quad b_n = \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{n}, \quad c_n = \left(\frac{4n-1}{3n+2}\right)^{n}$

   e) $a_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^3+8}, \quad b_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^4}, \quad c_n = \left(\frac{n^3-2}{n^3+1}\right)^{n^2}$

   f) $a_n = \left(1-\frac{2}{n!}\right)^{n!}, \quad b_n = \left(1-\frac{2}{n!}\right)^{(n-1)!}, \quad c_n = \left(1-\frac{2}{n!}\right)^{(n+1)!}$

2. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}} = ?$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+4}\right)^{n^2+4}} = ?$

3. Gyakorló példák rekurzív sorozatokhoz:

   a) $a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$

   b) $a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$

   (Útmutatás: $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, először $0 < a_n < 1$-et mutassa meg.)

   c) $a_1 = \frac{1}{3}; \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{3+a_n}$

   (Segítség: $a_{n+1} = \frac{a_n+3-3}{3+a_n} = 1 - \frac{3}{3+a_n}$)

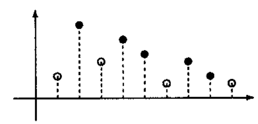
   d) $a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$

   e) $a_1 = 4; \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2+6}{5}$

   f) $a_1 = 5; \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}+5}$

●●●

(T) $\boxed{\text{Minden sorozatnak van monoton részsorozata.}}$



(B) „csúcs": a_{n_0} csúcs, ha $\forall\, n > n_0$-ra $a_n \le a_{n_0}$

1. $\exists$ végtelen sok csúcs $\implies$ van monoton csökkenő részsorozat, hiszen ezek a csúcsok monoton csökkenő részsorozatot alkotnak.

2. Véges sok csúcs van (esetleg nincs is).
   a_{s_1} : a legnagyobb indexű csúcs után következő elem. (Ha nem volt: $a_{s_1} = a_1$.)
   a_{s_1} nem csúcselem.
   $\exists\, s_2 > s_1 :\ a_{s_2} \ge a_{s_1}$, különben a_{s_1} csúcs lenne. a_{s_2} sem csúcselem.
   $\exists\, s_3 > s_2 :\ a_{s_3} \ge a_{s_2}$, különben a_{s_2} csúcs lenne.
   Stb. Így kapunk egy $(a_{n_r}) \nearrow$ részsorozatot.

Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel:

(T) $\boxed{\text{Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.}}$

(B) Az előző tétel miatt $\exists$ monoton részsorozat, és mivel ez korlátos $\Longrightarrow$ konvergens.

(M) A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazában nem igaz a Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel. Legyen $(b_n) = (1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414, \dots) \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $b_n \in \mathbb{Q}$.
$(b_n) \subset [1,2]$, azaz korlátos. (b_n) minden részsorozata $\sqrt{2}$-höz konvergál, tehát nincs (b_n)-nek olyan részsorozata, amely egy $\mathbb{Q}$-beli elemhez konvergálna.

●●●

Szükséges és elégséges tétel számsorozat konvergenciájához

Cauchy-féle konvergenciakritérium :

(T) Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad \forall n, m > M(\varepsilon) \text{ esetén}$$

($\neg$B)

(M_1) Más megfogalmazásban:

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon \qquad \forall n > M(\varepsilon)\,,\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ esetén}$$

(M_2)
A tétel azt a tényt fejezi ki, hogy konvergens sorozat elemei egymáshoz is tetszőlegesen közel vannak, ha indexeik elég nagyok. Ezt a tételt használhatjuk a konvergencia bizonyítására akkor is, ha a határértéket nem ismerjük.

(D) Az (a_n) számsorozatot *Cauchy-sorozatnak* nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists M(\varepsilon)$:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \qquad \text{ha } n, m > M(\varepsilon)$$

A Cauchy-féle konvergencia tételt megfogalmazhatjuk a következőképpen is:
Az (a_n) számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy sorozat.

(M) $\mathbb{Q}$-ban a Cauchy-sorozat nem feltétlenül konvergens.

Például $(a_n) = (1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414, \dots) \longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Az (a_n) Cauchy sorozat, mert $|a_{n+k} - a_n| < 10^{-N} = \varepsilon$, ha $n > N$, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges.
Nincs olyan $\mathbb{Q}$-beli elem, amelyhez (a_n) konvergálna.

●●●

Egy fontos példa

(Pl.)
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$

$$s_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

$$s_{2N} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

N-et akármilyen nagyra választjuk:

$$|s_{2N} - s_N| = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát nem szorítható ε alá, ha $\varepsilon \le \frac{1}{2}$. Nem teljesül rá a Cauchy-féle konvergencia kritérium $\Longrightarrow$ divergens.
Mivel $(s_n) \nearrow \Longrightarrow s_n \to \infty$.

●●●

Torlódási pont

(D) **Torlódási pont (sűrűsödési pont, sűrűsödési érték):**

$t \in \mathbb{R}$, ill. $t = \infty$, vagy $t = -\infty$ az (a_n) torlódási pontja, ha minden környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza
(Tehát létezik olyan (a_{n_r}) részsorozat, amely t-hez tart.)

($+\infty$ környezetei (P, ∞) alakúak, ahol $P \in \mathbb{R}$. $-\infty$ környezetei $(-\infty, M)$ alakúak, ahol $M \in \mathbb{R}$.)

(T) (a_n) valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha pontosan egy valós szám a torlódási pontja.

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ akkor és csak akkor, ha $t = \infty$ az egyetlen torlódási pont.

(D) $S := (a_n)$ torlódási pontjainak halmaza.

(T) Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor létezik legnagyobb torlódási pont. $(\neg B)$

(D) **Limesz szuperior:**

$$\limsup a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \overline{\lim}\, a_n := \begin{cases} \text{legnagyobb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos} \\ -\infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{-\infty\} \\ \infty, & \text{különben} \end{cases}$$

(D) **Limesz inferior:**

$$\liminf a_n \stackrel{\text{jel}}{=} \underline{\lim}\, a_n := \begin{cases} \text{legkisebb torlódási pont,} & \text{ha a torlódási pontok halmaza alulról korlátos} \\ \infty, & \text{ha } S = \emptyset \text{ vagy } S = \{\infty\} \\ -\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

(M) Ha $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \implies \overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

(Pl.) $\boxed{a_n = 2^{(-1)^n n}\,; \qquad \overline{\lim}\, a_n = ?\,, \quad \underline{\lim}\, a_n = ?}$

Ha n páros: $a_n = 2^n \to \infty$ (Részletezve: $n = 2m: \quad a_{2m} = 2^{2m} = 4^m \to \infty$)

Ha n páratlan: $a_n = 2^{-n} = \dfrac{1}{2^n} \to 0$ $\quad \left(n = 2m+1: a_{2m+1} = 2^{-(2m+1)} = \dfrac{1}{2\cdot 4^m} \to 0\right)$

Így a sorozat torlódási pontjai: $0\,, \infty \implies \overline{\lim}\, a_n = \infty\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = 0$

(Pl.)

$$a_n = \frac{n^2 + n^2 \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2n^2+3n+7}$$

Adja meg a számsorozat torlódási pontjait! $\overline{\lim}\, a_n = ?\,, \quad \underline{\lim}\, a_n = ?$

n értékétől függően három részsorozat viselkedését kell vizsgálnunk.

Ha $n = 2m$: $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,$ ezért a kapott részsorozat:

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+3n+7} \to \frac{1}{2}$$

Ha $n = 4m+1$: $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1\,,$ ekkor a részsorozat:

$$a_n = \frac{2n^2}{2n^2+3n+7} \to 1$$

Ha $n = 4m-1$: $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -1\,,$ így a részsorozat:

$a_n = 0 \to 0$

Tehát a torlódási pontok halmaza: $S = \{0\,, \frac{1}{2}\,, 1\}$

$$\overline{\lim}\, a_n = 1\,, \qquad \underline{\lim}\, a_n = 0$$