

VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (1)

Valós egyváltozós függvények differenciálszámítása

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné

Kónya Ilona

2000. február

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Függvény határértéke

Ⓓ Függvény: egyértékű reláció.

$f: D_f \rightarrow R_f \quad \forall x \in D_f \subset \mathbb{R}$ -hez hozzárendel pontosan egy $y \in R_f \subset \mathbb{R}$ -et.

($y = f(x)$)

D_f : domain, értelmezési tartomány (ÉT); R_f : range, értékkészlet (ÉK).

(Jelöljük $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ módon is.)

Korlátosság, paritás, monotonitás, periodikusság, néhány függvény: ... (L. előadás!)

Ⓓ Azt mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, ha

- x_0 torlódási pontja D_f -nek,
- $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad x \in D_f$$

(Azaz $f(x) \in K_{A,\varepsilon}$, ha $x \in \dot{K}_{x_0,\delta} \cap D_f$)

Halmazra szorító határérték:

az előző definícióban a $D_f \rightarrow D_f \cap H$ helyettesítést elvégezve kapjuk a definícióját.

Jobb oldali határérték: $H = (x_0, \infty)$

$$\text{Jelölése: } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0+0)$$

Bal oldali határérték: $H = (-\infty, x_0)$

$$\text{Jelölése: } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0-0)$$

A definíciókból következően $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists f(x_0-0), f(x_0+0)$

és $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ (véges).

Ⓓ Cauchy kritérium ($\neg B$)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon) > 0: x_1, x_2 \in \dot{K}_{x_0,\delta}$ esetén $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Ⓐ Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow 27} \sqrt[3]{x} = 3$

$$|f(x) - 3| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - 27| < \delta(\varepsilon) \quad \delta(\varepsilon) = ?$$

$$|\sqrt[3]{x} - 3| = \left| (\sqrt[3]{x} - 3) \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + 3\sqrt[3]{x} + 3^2} \right| = \frac{|x - 27|}{\sqrt[3]{x^2 + 3\sqrt[3]{x} + 9}} \underset{x > 0}{<} \frac{|x - 27|}{9} < \varepsilon$$

Innen $|x - 27| < 9\varepsilon$, így $\delta(\varepsilon) \leq \min\{9\varepsilon, 27\}$

(27 az $x > 0$ megkötésből származik.)

Ⓐ Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 5) = 11$

$$|f(x) - 11| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon) \quad \delta(\varepsilon) = ?$$

$$|x^2 - x + 5 - 11| = |x^2 - x - 6| = |x - 3||x + 2| < \varepsilon \quad \begin{matrix} < & |x - 3| \cdot 6 < \varepsilon \\ & |x - (-2)| < 6 \\ & -8 < x < 4 \end{matrix}$$

Tehát $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}$, vagyis $\delta(\varepsilon) \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\right\}$

(A vizsgálatot leszűkítettük a $(-8, 4)$ intervallumra. A vizsgált $x_0 = 3$ pontnak ezen intervallum végpontjaitól való minimális távolsága 1, tehát δ nem lehet 1-nél nagyobb. Ezért került be a képletbe 1.)

Ⓐ Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+1}{1-x} = -1$

$$|f(x) - (-1)| < \varepsilon, \text{ ha } 0 < |x - (-2)| < \delta(\varepsilon)$$

$$\left| \frac{2x+1}{1-x} + 1 \right| = \left| \frac{2x+1+1-x}{1-x} \right| = \left| \frac{x+2}{x-1} \right| < \varepsilon \quad \begin{matrix} < & \frac{|x+2|}{1} < \varepsilon \\ & |x-1| > 1 \\ & (x < 0) \vee (x > 2) \end{matrix}$$

Tehát $|x + 2| < \varepsilon$, vagyis $\delta(\varepsilon) \leq \min\{\varepsilon, 2\}$

(2: -2 távolsága 0-tól.)

Feladatok:

A definícióval mutassa meg, hogy

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x+5} = 3$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) = 3$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{3+x} = -\frac{1}{2}$$

...

1.1. Szükséges és elégséges tétel határérték létezésére

Átviteli elv:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \begin{array}{l} \forall x_n \rightarrow x_0 \text{-ra } f(x_n) \rightarrow A \\ x_n \in D_f \\ x_n \neq x_0 \end{array}$
<div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> (P állítás) (Q állítás) </div>

(B)

1. Szükségesség ($P \implies Q$):

Teljesül: $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Be kell látni:

$f(x_n) \rightarrow A$, tehát $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N(\varepsilon): |f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$

Algoritmus:

$\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon): |f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon) \rightarrow N_1(\delta(\varepsilon)): |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon))$

De ekkor $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, ha $n > N_1(\delta(\varepsilon)) \implies N(\varepsilon) := N_1(\delta(\varepsilon))$

2. Elégségesség ($Q \implies P$, ezzel ekvivalens $\neg P \implies \neg Q$):

$\forall x_n \rightarrow x_0$ -ra $f(x_n) \rightarrow A$.

Következik-e ebből, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon)$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$?

Indirekt módon bizonyítunk.

Tfh. $\exists \varepsilon > 0$, melyhez nincs $\delta(\varepsilon)$. Tehát minden δ rossz. Pl. $\delta = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^+$) is

rossz, tehát $\exists x_m: 0 < |x_m - x_0| < \frac{1}{m}$, de $|f(x_m) - A| \geq \varepsilon$. De ekkor lenne olyan

$x_m \rightarrow x_0$ pontsorozat, amelyre $f(x_m) \not\rightarrow A$

1.2. Végesben vett határértékek

$$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) = A \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = A \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0: \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1. 0 < |x - x_0| < \delta \\ (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) > \Omega, \text{ ha} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1. 0 < |x - x_0| < \delta \\ (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \\ 2. \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = -\infty \\ 3. \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists \delta(\Omega) > 0: \\ f(x) < -\Omega, \text{ ha} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1. 0 < |x - x_0| < \delta \\ (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta) \\ 2. 0 < x - x_0 < \delta \\ (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ 3. -\delta < x - x_0 < 0 \\ (x_0 - \delta < x < x_0) \end{array} \right.$$

...

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{6-2x} = -\infty$

$$\frac{1}{6-2x} < -\Omega \implies \frac{1}{2x-6} > \Omega > 0 \implies 0 < x-3 < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{6-2x} = +\infty$

$$\frac{1}{6-2x} = \frac{1}{2(3-x)} > \Omega \implies 2(3-x) < \frac{1}{\Omega} \implies 3-x < \frac{1}{2\Omega} = \delta(\Omega)$$

$$\left(-\delta(\Omega) = -\frac{1}{2\Omega} < x-3 < 0 \right)$$

1.3. Végtelenben vett határértékek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists P(\varepsilon) > 0: \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } x > P(\varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists P(\varepsilon) > 0: \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } x < -P(\varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \quad \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists P(\Omega) > 0: \quad f(x) > \Omega, \text{ ha } x > P(\Omega)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists P(\Omega) > 0: \quad f(x) < -\Omega, \text{ ha } x > P(\Omega)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists P(\Omega) > 0: \quad f(x) > \Omega, \text{ ha } x < -P(\Omega)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \forall \Omega > 0\text{-hoz } \exists P(\Omega) > 0: \quad f(x) < -\Omega, \text{ ha } x < -P(\Omega)$$

(M) Az átviteli elv mindegyik típusra kiterjeszhető. A rendőrelv is alkalmazható.

...

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+3}{2x-1} = \frac{3}{2}$

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ ha } x < -P(\varepsilon)$$

$$\left| \frac{3x+3}{2x-1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6x+6 - (6x-3)}{4x-2} \right| = \frac{9}{|4x-2|} < \varepsilon \implies |4x-2| > \frac{9}{\varepsilon}$$

$$x < 0 \text{ miatt } -(4x-2) > \frac{9}{\varepsilon} \implies -4x > \frac{9}{\varepsilon} - 2 \implies x < -\frac{\frac{9}{\varepsilon} - 2}{4} = -P(\varepsilon)$$

(Pl.) $f(x) = \{x\} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \{x\} \nexists$

Ugyanis

$$x_n^{(1)} = n \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \quad f(x_n^{(1)}) = 0 \rightarrow 0$$

$$x_n^{(2)} = n + \frac{1}{2} \rightarrow \infty \quad (n \in \mathbb{N}) \quad f(x_n^{(2)}) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\{x\}}{x^2+1} = 0$

A rendőrelv segítségével:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leq & \frac{\{x\}}{x^2+1} \leq & \frac{1}{x^2+1} \\ \downarrow & & & \downarrow \\ 0 & & & 0 \end{array}$$

$$\implies \frac{\{x\}}{x^2+1} \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow \pm\infty.$$

...

1.4. Feladatok

1. A megfelelő definícióval mutassa meg, hogy

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^2 + 1) = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{2x+4} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{1}{(x-2)^3} = \pm\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{1+x^2} = 3$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 + 3x + 5} = \infty$

2. Mutassa meg, hogy az alábbi határértékek nem léteznek!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x^2$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \lfloor \sin^2 x \rfloor$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, ha $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \text{ rac.} \\ -x^2, & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$

...

1.5. Műveletek függvények körében

$$(cf)(x) := c \cdot f(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$(f \circ g)(x) := f(g(x))$$

Pl. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sin x$ $(f \circ g)(x) = \sin^2 x$; $(g \circ f)(x) = \sin x^2$

A határértékekre vonatkozó tételek:

Ⓘ Ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, akkor

- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (cf)(x) = c \cdot A \quad (= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = A+B$
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) \left(= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) \right) = A \cdot B$
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{A}{B}$, ha $B \neq 0$

ⓑ A számsorozatokra vonatkozó hasonló tételek alapján. Pl. az összegre:

A feltételek miatt:

$$\forall x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \neq x_0, x_n \in D_f) \text{ sorozatra } f(x_n) \rightarrow A, \quad g(x_n) \rightarrow B$$

$$\Rightarrow \forall \text{ ilyen } x_n \rightarrow x_0\text{-ra: } (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A+B. \quad \text{Stb.}$$

ⓓ A tételek kiterjeszthetők minden határérték fajtára a számsorozatokhoz hasonlóan.

Ugyanazok a határozatlan alakok is.

...

$$\text{Pl. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{(x-1)}_0 \cdot \underbrace{\frac{x-1}{x-1}}_1 \cdot \underbrace{(x+1)^2}_4 = 0$$

$$\text{Ⓟ. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{(x^2-9)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-3} \cdot \frac{x-2}{(x+3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-3} \cdot \frac{x-2}{(x+3)^2} = +\infty$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad 1 \quad \frac{3-2}{6^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x-3} \cdot \frac{x-2}{(x+3)^2} = -\infty$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $-\infty \quad 1 \quad \frac{3-2}{6^2}$

$$\text{Ⓟ. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{(x^2-9)^2} = +\infty$$

$$\text{Ⓟ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2} \cdot \frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\sqrt{4+x}+2) = 4$$

$$\text{Ⓟ. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8+x}{3x^2+6} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{3x^2} \cdot \frac{1+\frac{8}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 0$$

\downarrow
 $\frac{1}{3x} \rightarrow 0$

$$\text{Ⓟ. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+3x+1}{6+3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{3x^2} \cdot \frac{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$$

\downarrow
 $\frac{1}{3}$

$$\text{Ⓟ. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9-2x^2}{3x+6} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x} \cdot \frac{1-\frac{9}{2x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \mp\infty$$

\downarrow
 $-\frac{2}{3}x$

\downarrow
 $\mp\infty$

$$\text{Ⓟ. } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^9+6x^5+2x^2+3) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x^9 \left(1 - \frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^7} - \frac{3}{x^9} \right) = \mp\infty$$

\downarrow
 1

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{Pl.}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 + 6x}) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 8 - (x^2 + 6x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 + 6x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2} + \frac{1 - \frac{8}{3x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{6}{x}}}} = (\mp 3) \cdot \frac{1}{1+1} = \mp \frac{3}{2} \\ &= \frac{-3x}{|x|} = \frac{-3x}{\pm x} \end{aligned}$$

1.6. Folytonosság

x_0 : az értelmezési tartomány belső pontja ($\exists K_{x_0} \subset D_f$)

$$\textcircled{\text{D}} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ folytonos } x_0\text{-ban, ha } \exists f(x_0) \text{ és } \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta(\varepsilon) > 0: \\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \end{array} \right.$$

Ezzel egyenértékű:

$$f \text{ folytonos } x_0\text{-ban, ha } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(= f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) \right)$$

(Tehát a folytonossági helyeken a határátmenet és a függvénytűvelet felcserélhető.)

Jobból folytonos f x_0 -ban, ha: $f(x_0) = f(x_0 + 0)$

Balról folytonos f x_0 -ban, ha: $f(x_0) = f(x_0 - 0)$

Beláthatók a következő tételek:

$\textcircled{\text{T}}$ Ha f illetve g folytonos x_0 -ban, akkor

$c \cdot f, f + g, f \cdot g$ és $g(x_0) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0 -ban.

$\textcircled{\text{T}}$ Ha g folytonos x_0 -ban és f folytonos $g(x_0)$ -ban, akkor $f \circ g$ folytonos x_0 -ban.

1.7. Szakadási helyek osztályozása

Ha az értelmezési tartomány belső pontjában f nem folytonos, akkor a szakadás lehet:

1. Elsőfajú szakadás

- a) megszüntethető szakadás: $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ (véges), de $\neq f(x_0)$ vagy $\nexists f(x_0)$
 b) véges ugrás: \exists a véges $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0)$, de $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$

2. Másodfajú szakadás (lényeges szakadás): minden más szakadási hely

$\textcircled{\text{Pl.}}$ Milyen szakadása van $x = 1$ -ben az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9}$$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 4)$
 A nevezőnek is gyöke $x = 1$, ezért kiemelhető belőle $(x - 1)$.

$$(x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9) : (x - 1) = x^3 - x^2 + 9x - 9$$

A hányadosnak még mindig gyöke $x = 1$, így: $(x^3 - x^2 + 9x - 9) : (x - 1) = x^2 + 9$.
 Tehát

$$f(x) = \frac{1}{\pm\infty} \cdot \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2+9}$$

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \mp\infty$: $x = 1$ másodfajú szakadás

$\textcircled{\text{Pl.}}$ Hol és milyen szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x+2|} + \frac{1}{x+2}, & \text{ha } x \leq -1 \\ \frac{-x^3 + x^2 + 4x - 4}{1 - x^2}, & \text{ha } x > -1 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

$x = -2$:

$$\text{Ha } x < -2 : f(x) = \frac{1}{-(x+2)} + \frac{1}{x+2} = 0 \implies f(-2-0) = 0.$$

$$\text{Ha } -2 < x \leq -1 : f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x+2} \implies f(-2+0) = +\infty.$$

Így $x = -2$ lényeges (másodfajú) szakadás.

$$\text{Ha } x > -1 : f(x) = \frac{x^2(-x+1) + 4(x-1)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x}{1-x} \frac{x^2-4}{1+x}$$

$$x=1 : f(1+0) = f(1-0) = -\frac{3}{2} : x=1 \text{ megszüntethető szakadás } (\neq f(1))$$

$$x=-1 : f(-1-0) = f(-1) = 2$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1-x}{1-x} \underbrace{(x^2-4)}_{-3} \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{+\infty} = -\infty$$

Tehát $x = -1$ másodfajú szakadás.

(Pl.) Mutassuk meg, hogy

$$x, x^2, x^n, P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

mindenütt folytonos!

L. előadás!

Feladatok

1. a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+ax+1}) = ? \quad a \in \mathbb{R}, a \geq 0$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^4+ax^2+2} - \sqrt{x^4+bx^2+1}) = ? \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
2. a) $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2 \pm} \frac{x}{\{x\}} = ?$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\{\pi x\}}{\{x\}} = ?$
3. $\lim_{x \rightarrow 2 \pm} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}} + \frac{1}{x-2} \right) = ?$
4. a) $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}} = ?$
- b) $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{3x+4} - 1} = ?$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{-x}} = ?$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = ?$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt[3]{x-1}}{1 - \sqrt{x-1}} = ? \quad (\text{Próbálkozzon } u = \sqrt[3]{x-1} \text{ helyettesítéssel!})$$

5. Milyen típusú szakadásai vannak az

$$\frac{x^2 - x - 20}{|x^2 - 12x + 35| (x+4)}$$

függvénynek?

6. Milyen típusú szakadása van $x = -1$ -ben f -nek?

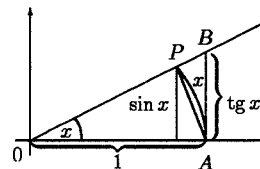
$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4}$$

7. Hol és milyen típusú szakadása van f -nek?

$$f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 8)(x+4)}{|x^2 + 3x - 10| (x^2 + 5x + 4)}$$

1.8. Egy nevezetes határérték

(T) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



(B) Mivel $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ páros, elég $f(+0)$ -val foglalkozni.

Legyen $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$T_{POA\Delta} < T_{POA\circ} < T_{OAB\Delta}$$

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{1^2 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$$

Mindkét oldalt $\frac{2}{\sin x} > 0$ -val megszorozva:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad \qquad \qquad 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

(M) Tehát $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ -ben $\sin x < x \Rightarrow |\sin x| \leq |x| \quad \forall x$ -re.

(Pl.)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1^2} = \frac{2}{3}$$

(Pl.)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} = \frac{3}{2}$$

(Pl.)
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \cdot \underbrace{\sin x}_1 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \stackrel{u := x - \frac{\pi}{2}}{=} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{\cos(u + \frac{\pi}{2})} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-u}{-\sin u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{1} = 1$$

Feladatok

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = ?$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} x} = ?$

2. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin \sqrt{x} \sin \sqrt[3]{x^3}}{\sin \pi x} = ?$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = ?$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = ?$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = ?$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = ?$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = ?$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = ?$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) = ?$

14. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x} = ?$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = ?$

15. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = ?$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{\sin^2 3x} = ?$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = ?$

16. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{1 - \cos 5x}{5x - \pi} = ?$

17. Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = \frac{(x^2 + 3x + 2) \sin |2 - x|}{x^2 - 4}$$

függvénynek?

18. Hol és milyen típusú szakadása van az alábbi függvénynek?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x+3|} + \frac{1}{x+3}, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\operatorname{tg} x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

...

2. Folytonos függvények tulajdonságai

Néhány definíció:

(D) f folytonos (a, b) -n, ha $\forall x \in (a, b)$ -ben folytonos.

(D) f folytonos $[a, b]$ -n, ha folytonos (a, b) -n és a -ban jobbról, b -ben balról folytonos.

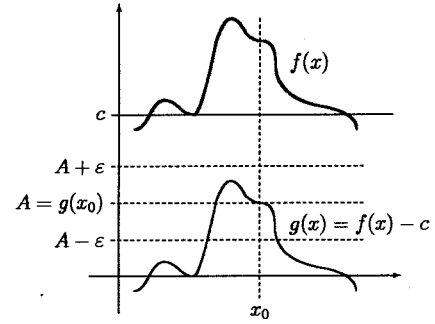
(D) $b \in H$ belső pont, ha $\exists K_b : K_b \subset H$

(D) h határpont, ha $\forall K_h$ -ra $K_h \cap H \neq \emptyset$ és $K_h \cap \bar{H} \neq \emptyset$

- Ⓓ k külső pont, ha $\exists K_h : K_h \cap H = \emptyset$
- Ⓓ Nyílt halmaz: minden pontja belső pont
- Ⓓ Zárt halmaz: a nyílt halmaz komplementere
- Ⓓ **Kompakt halmaz** \mathbb{R} -ben: korlátos és zárt halmaz (\mathbb{R}^n -ben is érvényes a definíció)

Ⓓ Ha f folytonos x_0 -ban és $f(x_0) > c$, akkor $\exists \delta > 0: f(x) > c$, ha $x \in K_{x_0, \delta}$.

Ⓓ $g(x) := f(x) - c$
 g is folytonos x_0 -ban és $g(x_0) > 0$.
 Bizonyítandó, hogy $\exists K_{x_0, \delta}$:
 $g(x) > 0 \quad \forall x \in K_{x_0, \delta}$ -ra.
 $A := g(x_0)$. A folytonosság miatt:



$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - A| < \epsilon, \text{ ha } |x - x_0| < \delta(\epsilon).$$

$\epsilon := \frac{A}{2} \rightarrow \delta\left(\frac{A}{2}\right)$, hogy

$$|g(x) - A| < \frac{A}{2}, \text{ azaz } 0 < \frac{A}{2} = A - \frac{A}{2} < g(x) \left(< A + \frac{A}{2} \right), \text{ ha } |x - x_0| < \delta\left(\frac{A}{2}\right).$$

Tehát itt $g(x) > \frac{A}{2} > 0 \implies f(x) = g(x) + c > c + \frac{A}{2} > c$.

Ⓓ **Bolzano tétel:**

Ha f folytonos $[a, b]$ -ben és $f(a) < c < f(b)$, akkor létezik $\xi \in (a, b): f(\xi) = c$

Ⓓ

1. lépés:

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) > c \implies a_1 = a, b_1 = \frac{a+b}{2}, I_1 = [a_1, b_1]$$

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < c \implies a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b, I_1 = [a_1, b_1]$$

$$\text{Ha } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = c \implies \xi = \frac{a+b}{2}. \text{ Ekkor vége az eljárásnak. Egyébként}$$

$$f(a_1) < c < f(b_1), \quad [a, b] \supset I_1, \quad |a_1 - b_1| = \frac{|a - b|}{2}$$

2. lépés: Megismételjük az eljárást I_1 -re, így kapunk egy $I_2 = [a_2, b_2]$ intervallumot:
 $f(a_2) < c < f(b_2), \quad [a, b] \supset I_1 \supset I_2, \quad |a_2 - b_2| = \frac{|a - b|}{4}$, vagy megkaptuk ξ értékét.
 Ha ξ -t nem kaptuk meg, folytatjuk az eljárást.

\vdots
 n. lépés:

$$f(a_n) < c < f(b_n), \quad [a, b] \supset I_1 \supset \dots \supset I_n$$

$$\text{A Cantor-axióma szerint: } \exists \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \text{és } |a_n - b_n| = \frac{|a - b|}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$0 \leq |a_n - \xi| \leq |a_n - b_n| \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi \quad (\text{rendőrelv})$$

$$\downarrow 0$$

$$0 \leq |b_n - \xi| \leq |a_n - b_n| \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi \quad (\text{rendőrelv})$$

$$\downarrow 0$$

f folytonossága és az átviteli elv alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Másrészt a sorozatok határértékére vonatkozó egyenlőtlenségek alkalmazásával kapjuk:

$$f(a_n) < c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq c$$

$$f(b_n) > c \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq c$$

Tehát $f(\xi) \leq c$ és $f(\xi) \geq c$, ami azt jelenti, hogy $f(\xi) = c$.

1. Következmény:

Ha f folytonos $[a, b]$ -ben és $f(a) < 0, f(b) > 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek legalább egy gyöke van (a, b) -ben.

Ⓓ A Bolzano tételben $c = 0$ -hoz $\exists \xi \in (a, b)$, hogy $f(\xi) = c \implies \xi$ gyöke az egyenletnek.

2. Következmény:

Páratlan fokszámú polinomnak legalább egy valós gyöke van.

Ⓓ Legyen $f(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_1x + a_0$, legyen $a_{2k+1} > 0. \implies$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \implies \exists \Omega : f(\Omega) > 1 \text{ és } \exists \omega : f(\omega) < -1$$

A polinomok folytonosak mindenütt, tehát $[\omega, \Omega]$ -ban is, így az előző következmény szerint $\exists \xi \in (\omega, \Omega) : f(\xi) = 0$.

2.1. Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

(T) Weierstrass I. tétele

Ha f folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor ott f korlátos.

(B) Indirekt:

Tfh. nem korlátos pl. felülről, tehát $\nexists K : f(x) \leq K$ teljesüljön $\forall x \in [a, b]$ -re.

Ekkor $\exists x_1 : x_1 \in [a, b], f(x_1) > 1$

$\exists x_2 : x_2 \in [a, b], f(x_2) > 2$

\vdots

$\exists x_n : x_n \in [a, b], f(x_n) > n$

\vdots

(x_n) sorozat korlátos ($\forall x_n \in [a, b]$) B.W. kiv. t. \exists konv. részsorozat: $(x_{n_i}) \rightarrow x_0$.

Mivel $a \leq x_{n_i} \leq b$ mindig fennáll, ezért $a \leq \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x_0 \leq b$. Tehát $x_{n_i} \rightarrow x_0 \in [a, b]$,

de $f(x_{n_i}) \rightarrow \infty \nexists f$ folytonos x_0 -ban, ezért $f(x_{n_i}) \rightarrow f(x_0)$. ■

(T) Weierstrass II. tétele:

Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, akkor ott felveszi az infimumát ill. szuprimumát, tehát van minimuma és maximuma. Vagyis $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$, hogy

$$f(\alpha) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \left(= \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = \max f([a, b]) \right)$$

$$f(\beta) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \quad \left(= \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} = \min f([a, b]) \right)$$

(B) $A := f([a, b])$.

Weierstrass I. tétele értelmében A korlátos Dedekind $\exists \sup A := M; \inf A := m$.

Megmutatjuk, hogy $\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) = M, f(\beta) = m$.

Bizonyítás $f(\alpha) = M$ -re: indirekt. (Hasonlóan lehetne $f(\beta) = m$ -re.)

Tfh. $\nexists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = M \implies M - f(x) > 0$, ha $x \in [a, b]$

$\implies g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ folytonos $[a, b]$ -ben W.I. t. g korlátos $[a, b]$ -ben, tehát $\exists K :$

$$\frac{1}{M - f(x)} < K, \quad x \in [a, b] \quad (K > 0, \frac{1}{M - f(x)} > 0)$$

$$M - f(x) > \frac{1}{K}$$

$$f(x) < \underbrace{M - \frac{1}{K}}_{\text{felső korlát}} < M \text{ (legkisebb felső korlát)} \quad \nexists$$

$$(Pl.) \quad f(x) = x^2 + 2$$

1. Mutassuk meg, hogy $\forall x_0 \in [1, 2]$ -ben folytonos a függvény!

2. Megadható-e közös $\delta(\varepsilon)$? (Létezik-e $\inf_{x_0 \in [1, 2]} \delta(\varepsilon, x_0) > 0$?)

Megoldás:

$$1. |f(x) - f(x_0)| = |x^2 + 2 - (x_0^2 + 2)| = |x - x_0||x + x_0| < |x - x_0|(2|x_0| + 1) < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} = \delta(\varepsilon, x_0)$$

$$2. \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \underset{x_0 \in [1, 2]}{\geq} \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon, 2) \quad \text{a közös } \delta(\varepsilon)$$

2.2. Egyenletes folytonosság

(D) Az f függvény egyenletesen folytonos az A halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta(\varepsilon)$ (A -ban közös):

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{ha } |x_1 - x_2| < \delta; \quad x_1, x_2 \in A$$

(M₁) Tehát $\exists \inf_{x \in A} \delta(\varepsilon, x) > 0$

(M₂) Az A halmaz általában intervallum szokott lenni.

$$(Pl.) \quad f(x) = x^2 + 2$$

1. Egyenletesen folytonos-e f az $[1, 2]$ intervallumon?

2. Egyenletesen folytonos-e f az $(1, 2)$ intervallumon?

3. Egyenletesen folytonos-e f az $(1, \infty)$ intervallumon?

Megoldás:

1. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel (lásd előző példa)

2. Igen. $\delta(\varepsilon, 2)$ megfelel. (Ami a zárt intervallumhoz megfelel, az a nyílthoz is mindig jó.) Általánosságban is igaz, hogy ha f egyenletesen folytonos I -n (nyílt vagy zárt), akkor $I_1 \subset I$ esetén I_1 -en is egyenletesen folytonos. Ugyanaz a δ megfelel.

3. f nem egyenletesen folytonos $(1, \infty)$ -en.

$x_n^{(1)} := n \rightarrow \infty$, $x_n^{(2)} := n + \frac{1}{n} \rightarrow \infty$, $x_n^{(2)} - x_n^{(1)} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$; egymást tetszőlegesen megközelítik, ha n -et elegendően nagyoknak választjuk.

Mégis

$$|f(x_n^{(2)}) - f(x_n^{(1)})| = \left| \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 + 2 - (n^2 + 2) \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Tehát, ha $\varepsilon < 2$, nincs közös δ .

(Pl.) $f(x) = x$ egyenletesen folytonos $(-\infty, \infty)$ -en.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

(Pl.) $f(x) = \sin x$ egyenletesen folytonos $(-\infty, \infty)$ -en.

Felhasználjuk, hogy

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ ill. } |\sin x| \leq |x|.$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \cdot \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot 1 \leq 2 \frac{|x_1 - x_2|}{2} = |x_1 - x_2| < \varepsilon \implies \delta(\varepsilon) = \varepsilon$$

(M) Ezzel persze azt is beláttuk, hogy $\sin x$ mindenütt folytonos.

(Pl.) $f(x) = \operatorname{tg} x$ egyenletesen folytonos $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$ -on.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x_2}{\cos x_2} \right| = \left| \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{(\cos \frac{\pi}{3})^2} = 4|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$$\implies \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$$

(Pl.) $f(x) = \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos $(0, 1)$ -en.

$x_n^{(1)} := \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $x_n^{(2)} := \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \implies x_n^{(1)} - x_n^{(2)} \rightarrow 0$.
Ugyanakkor

$$|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = |n - (n+1)| = 1 \not< \varepsilon, \text{ ha } \varepsilon < 1$$

(Pl.) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ nem egyenletesen folytonos $(0, 1)$ -en.

$x_n^{(1)} := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$, $x_n^{(2)} := \frac{1}{3\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$

$$|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) - \sin \left(3\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \right| = |1 - (-1)| = 2 \not< \varepsilon, \text{ ha } \varepsilon \leq 2.$$

(T) Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor ott egyenletesen folytonos. (-B)

(T) Ha f folytonos $[a, \infty)$ -en és $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (véges), akkor f egyenletesen folytonos $[a, \infty)$ -en. (-B)

(Pl.) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Egyenletesen folytonos-e $(1, 10)$ -en?

Megoldás:

Mivel P_n folytonos $[1, 10]$ -en $\implies P_n$ itt egyenletesen folytonos
 $\implies P_n$ az $(1, 10) \subset [1, 10]$ -en is egyenletesen folytonos.

Feladatok

1. $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

- a) Hol és milyen típusú szakadása van az f függvénynek?
b) Van-e minimuma f -nek a $[-1, 0]$ intervallumon?

2. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{1}{\cos x}$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = ?$
b) Bizonyítsa be, hogy f -nek van gyöke $(0, \frac{\pi}{2})$ -ben!

3. Legyen f folytonos $(-\infty, \infty)$ -en és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -5$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$.
Bizonyítsa be, hogy f korlátos $(-\infty, \infty)$ -en! Van-e nullahelye f -nek?

4. a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$?

b) Bizonyítsa be, hogy ha f folytonos a $[2, \infty)$ intervallumon és

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5, \quad \sup_{x \in (2, \infty)} f(x) = 6,$$

akkor f értékkészletében szerepel a 6.

5. Van-e gyöke az alábbi egyenletnek a $(0, \pi)$ -ben?

$$\frac{1}{x}(\cos^2 x + 1) + \frac{1}{x - \pi}(\sin^2 x + 1) = 0$$

6. $f(x) = 2x^3 - 3$

a) Mutassa meg a határérték definíciója alapján, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 13$ ($\delta(\varepsilon) = ?$)

b) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1, 4)$ intervallumon?

c) Egyenletesen folytonos-e az f függvény az $(1, \infty)$ intervallumon?

3. Differenciálszámítás

(D) Differenciahányados (különbségi hányados):

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\text{függvényérték megváltozása}}{\text{független változó megváltozása}} : \text{húr iránytangense} \right)$$

$\Delta x \rightarrow 0$ esetén a húrok átmennek az érintőbe, ha létezik

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{differenciáhányados (derivált)} = \text{az érintő iránytangense.}$$

(D) Legyen $K_{x_0, \delta} \subset D_f$

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(D) Jobb oldali derivált: $f'_+(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(D) Bal oldali derivált: $f'_-(x_0)$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(M) $f'(x_0)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\exists f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$ és $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

(D) f differenciálható (a, b) -ben, ha $\exists f'(x) \forall x \in (a, b)$ -re.

(D) f differenciálható $[a, b]$ -ben, ha differenciálható (a, b) -ben és még $\exists f'_+(a), f'_-(b)$.

Példák: ... (1. előadás!)

(T) Szükséges és elégséges tétel deriválhatóságra:

f akkor és csak akkor differenciálható x_0 -ban, ha $K_{x_0, \delta} \subset D_f, |h| < \delta$ -ra:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol A csak x_0 -tól függhet, h -tól nem, és $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. (Itt $A = f'(x_0)$.)

(B)

1. Szükségesség:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \implies \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon,$$

ahol $\varepsilon \rightarrow 0$, ha $h \rightarrow 0$. $\implies (\Delta f) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \varepsilon \cdot h$.

2. Elégségesség:

$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$ teljesül. Innen

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h) \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A (= f'(x_0))$$

(T) Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor ott folytonos.

(M) Tehát a folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak, de nem elégséges.

Lásd $|x|$.

(B) A szükséges és elégséges tétel alapján:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

Mindkét oldalon határértéket veszünk. $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ -ra jutunk, vagyis a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, tehát folytonos. ■

(Pl.) $f(x) = x^2 \quad f'(x) = ?$

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2x \cdot h + h \cdot h = A \cdot h + \varepsilon \cdot h$$

$$A = f'(x) = 2x \text{ (független } h\text{-től), } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

3.1. Differenciál, érintő egyenes

Ha f differenciálható x_0 -ban:

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0) \cdot h}_{\text{főrész}} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot h}_{\text{elenyésző rész}}$$

(D) Az f függvény (elsőrendű) differenciálja az x_0 pontban h megváltozás mellett:
 $df = df(x_0, h) := f'(x_0) \cdot h$

(M) $df(x_0, h)$: a függvény x_0 -beli érintő egyenesén a függvényérték megváltozása h lépésre.

Egyéb jelölések:

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x; \quad df = f'(x) \Delta x = f'(x) \cdot dx$$

(Pl.) $f(x) = x^3$: $df = 3x^2 \Delta x$, tehát $dx^3 = 3x^2 dx$

(Pl.) $f(x) = x$: $df = 1 \cdot \Delta x$, tehát $dx = \Delta x$. Ez indokolja a differenciál legutolsó jelölését.

Alkalmazása:

$$\Delta f \approx df :$$

$$\underbrace{f(x_0 + h)}_{:=x} \approx f(x_0) + df(x_0, h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$: az x_0 pontbeli érintő egyenes egyenlete.

3.2. Differenciálási szabályok

(T) Ha f és g differenciálható x -ben, akkor itt $f + g$, cf ($c \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ is differenciálható valamint $g(x) \neq 0$ esetén $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálható, és

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

2. $(cf(x))' = cf'(x)$

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

4. $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(B)

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
 $z(x) := f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned} z'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

2. $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$

$$(cf(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x)$$

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$ (határérték = helyettesítési érték) oka:
 g deriválható x -ben $\implies g$ folytonos x -ben

4. $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h g(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{g(x)g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$: g folytonossága miatt

$(g(x) \neq 0$ és g folytonos x -ben (mivel deriválható) $\implies \exists K_x : g(x) \neq 0$ (lásd a Bolzano tétel előtti segédtelet). Tehát elegendően kis h -ra $g(x+h) \neq 0$.)

5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Ez már következik az előző két pontból:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Láncszabály: összetett függvény deriválása

(T₂) Ha f differenciálható K_{x_0, δ_1} -ben és g differenciálható $K_{f(x_0), \delta_2}$ -ben, akkor $g \circ f$ is differenciálható x -ben és

$$((g \circ f)(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (-B)$$

(T₃) Ha f folytonos $K_{x_0, \delta}$ -ban, $x \in K_{x_0, \delta} \setminus \{x_0\}$ (tehát $x \in K_{x_0, \delta}$ esetén $\exists f'(x)$ és $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = c$, akkor f differenciálható x_0 -ban és $f'(x_0) = c$. (-B)

(Pl.) $f(x) = (2x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 5}$

$$f'(x) = (2x^2 + 3)' \sqrt{x^2 + 5} + (2x^2 + 3) (\sqrt{x^2 + 5})' = 4x \sqrt{x^2 + 5} + (2x^2 + 3) \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} \cdot 2x$$

(Pl.) $f(x) = \frac{x^7 + x^2 + 5}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}$

$$f'(x) = \frac{(x^7 + x^2 + 5)' \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - (x^7 + x^2 + 5) (\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1})'}{(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1})^2} =$$

$$= \frac{(7x^6 + 2x) \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} - (x^7 + x^2 + 5) \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}} \cdot (4x^3 + 4x)}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

...

Magasabbrendű deriváltak: ... (1. előadás!)

...

3.3. Inverz függvény

Inverz függvény fogalma, tulajdonságai. példák: ... (L. előadás!)

Inverz függvény deriválása

Legyen f szigorúan monoton I -ben \implies invertálható
 f differenciálható I -ben \implies f folytonos I -ben
 és $f'(x) \neq 0$ I -ben.

A feltételek miatt belátható, hogy $f(I)$ is intervallum. Ekkor f^{-1} differenciálható az $f(I)$ tetszőleges belső pontjában (x_0) és

$$f^{-1}'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{f^{-1}'(f(x_0))}$$

A tételt nem bizonyítjuk, csak szemléltetjük. L. előadás!

4. Elemi függvények

L. előadás!

Deriválttáblázat

$f(x)$	$f'(x)$	D_f
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$(0, +\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$(-\infty, +\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(0, \pi)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(0, +\infty)$
$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(-\infty, +\infty)$
$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$(1, +\infty)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$

4.1. Példák

Pl. $f(x) = \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

- $D_f = ?$ $R_f = ?$
- Írja fel az $x_0 = \frac{4}{5}$ pontbeli érintő egyenes egyenletét!
- Mutassa meg, hogy f -nek létezik az inverze és határozza meg!
($f^{-1}(x) = ?$)

Megoldás:

$$1. 0 \leq \frac{1}{x} - 1 \leq 1 \implies 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \implies \frac{1}{2} \leq x \leq 1: D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\text{Itt } 0 \leq \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \leq \frac{\pi}{2} \implies \frac{\pi}{2} \leq \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \leq \pi: R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x} - 1\right)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$x_0 = \frac{4}{5}; f\left(\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$

$$f'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{-5^2}{4^2} = \frac{-25}{8\sqrt{3}}$$

$$y_é = f\left(\frac{4}{5}\right) + f'\left(\frac{4}{5}\right) \left(x - \frac{4}{5}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{25}{8\sqrt{3}} \left(x - \frac{4}{5}\right)$$

3. $\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 \leq 1$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\implies f$ szigorúan monoton csökken $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en

(Vagy:

$f' < 0$ $D_f = I$ -n $\implies f$ szigorúan monoton csökken $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en)

$$y = \pi - \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \implies \arccos \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \pi - y$$

$$\implies \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \cos(\pi - y) \implies \frac{1}{x} - 1 = \cos^2(\pi - y)$$

$$\implies \frac{1}{x} = 1 + \cos^2(\pi - y) \implies x = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - y)} \quad (x \leftrightarrow y)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1 + \cos^2(\pi - x)} = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \quad R_{f^{-1}} = D_f = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Pl. Legyen

$$f(x) = -\frac{\pi x}{3} + \arcsin\left(\frac{2}{x}\right), \quad x \in (2, \infty)$$

1. $f'(x) = ?$

2. Indokolja meg, hogy a függvénynek létezik az inverze! Határozza meg az inverz függvény értelmezési tartományát!

Ellenőrizze, hogy f^{-1} grafikonja átmegy a $\left(-\frac{7\pi}{6}, 4\right)$ ponton!

3. Írja fel az inverz függvénynek ezen a ponton áthaladó érintő egyenes egyenletét!

Megoldás:

$$1. f'(x) = -\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2}} \cdot \frac{-2}{x^2} = -\frac{\pi}{3} - \frac{2}{x\sqrt{x^2 - 4}}, \quad \text{ha } x > 2.$$

2. $2 < x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$ megmutatható (HF.) $\implies f$ szigorúan monoton csökken $\implies \exists f^{-1} D_f$ -en

(Vagy:

$x > 2$ -re $f'(x) < 0 \implies f$ szigorúan monoton csökken \implies invertálható)

$$x \in (2, \infty)\text{-re } \frac{2}{x} \in (0, 1) \implies \arcsin \frac{2}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\implies R_f = \left(-\infty, -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\infty, -\frac{\pi}{6}\right) = D_{f^{-1}}$$

$$\text{Mivel } f(4) = -\frac{4\pi}{3} + \arcsin \frac{1}{2} = -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} \implies f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 4$$

3. Az érintő egyenes egyenlete:

$$f^{-1}'\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{3} - \frac{2}{4\sqrt{4^2-4}}} = -\frac{12}{4\pi + \sqrt{3}}$$

$$y = \underbrace{f^{-1}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)}_{=4} + f^{-1}'\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \left(x - \left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 4 + \frac{-12}{4\pi + \sqrt{3}} \left(x + \frac{7\pi}{6}\right)$$

(Pl.) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\arcsin(2x-5)}{3}\right)$

Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékészletét! Mutassa meg, hogy a teljes értelmezési tartományban létezik az inverze, és írja fel az inverz függvényt!

Megoldás:

$D_f = \{x : |2x-5| \leq 1\} = [2,3]$, mert akkor $\left|\frac{\arcsin(2x-5)}{3}\right| \leq \frac{\pi}{6}$ miatt tg is értelmezett.

D_f -en $\frac{\arcsin(2x-5)}{3}$ értékészlete $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Mivel $2x-5$, \arcsin és tg is szigorúan monoton növekvő, ezért f is az D_f -en $\Rightarrow D_f$ -en $\exists f^{-1}$

$$y = \operatorname{tg} \underbrace{\frac{\arcsin(2x-5)}{3}}_{\in\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)} \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \frac{\arcsin(2x-5)}{3} \Rightarrow 2x-5 = \sin(3 \operatorname{arctg} y) \Rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(3 \operatorname{arctg} y)$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sin(3 \operatorname{arctg} x); \quad D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]; \quad R_{f^{-1}} = D_f = [2,3]$$

(Pl.) $f(x) = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x\right)}$

Adja meg az $x=5$ pontot tartalmazó legbővebb intervallumot, amelyen a függvény invertálható, és írja fel itt az inverz függvényt!

$$D_{f^{-1}} = ? \quad R_{f^{-1}} = ?$$

Megoldás:

$$x \in (4,6) \text{ esetén } \frac{\pi}{4} x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x \in (0, \infty) = D_{\ln}$$

Tehát $f: (4,6) \rightarrow (-\infty, \infty)$ egy-egyértelmű, mert az összetételben szereplő függvények mindegyike szigorúan monoton nő az érintett intervallumon $\Rightarrow f$ szigorúan monoton nő $\Rightarrow \exists f^{-1}$.

Az inverz:

$$y = \sqrt[3]{\ln\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x\right)} \Rightarrow y^3 = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x\right) \Rightarrow e^{(y^3)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} x\right) = \operatorname{tg}\left(\underbrace{\frac{\pi}{4} x - \pi}_{\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} e^{(y^3)} = \frac{\pi}{4} x - \pi \Rightarrow x = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(y^3)} + 4$$

Tehát

$$f^{-1}(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(x^3)} + 4; \quad D_{f^{-1}} = (-\infty, \infty); \quad R_{f^{-1}} = (4,6)$$

...

5. A differenciálszámítás középérték-tételei

5.1. Szükséges feltétel lokális szélsőérték létezésére

(Differenciálható függvényre, az értelmezési tartomány belső pontjában)

(D) f -nek lokális maximuma (minimuma) van az értelmezési tartomány belső c pontjában, ha $\exists K_{c,\delta}: f(x) \leq f(c)$ ($f(x) \geq f(c)$), ha $x \in K_{c,\delta}$.

(T) Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$. ($K_{c,\delta} \subset D_f$)

(B) Pl. lokális maximumra:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{=} = \underbrace{f'_-(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \underbrace{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}_{\neq} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0 \quad (\text{vízszintes érintő})$$

5.2. A differenciálszámítás középértéktételei

Ⓘ Rolle tétel:

Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n és $f(a) = f(b)$, akkor

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

Ⓙ Weierstrass II. tétele értelmében f -nek van minimuma és maximuma. Ha mindkettőt a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt $f(x) \equiv \text{konst.}$ és így $\forall \xi \in (a, b)$ -re $f'(\xi) = 0$. Ha valamelyiket az intervallum belsejében veszi fel, akkor ott az előző tétel értelmében $f'(\xi) = 0$ (ξ a szélsőértékhely).

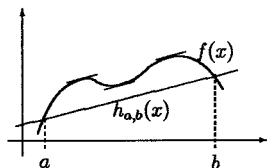
Ⓚ Lagrange-féle középértéktétel:

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n, akkor $\exists \xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{Ⓒ } h_{a,b}(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = h(x)$$

$g(x) := f(x) - h(x) \quad g(a) = g(b) = 0$;
 g folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n



$$\text{Rolle t. } \exists \xi \in (a, b) : g'(\xi) = f'(\xi) - \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{h'(\xi)} = 0$$

Ⓜ Cauchy-féle középértéktétel:

Ha f és g folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$, akkor $\exists \xi \in (a, b)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\text{Ⓒ } h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

h folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b) \xrightarrow{\text{Rolle t.}} \exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0, \text{ vagyis}$$

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$$

$g(b) - g(a) \neq 0$, ellenkező esetben $g(a) = g(b)$ miatt g -re alkalmazható lenne a Rolle tétel és akkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre $g'(\xi) = 0$ lenne. Így rendezéssel megkapjuk az állítást.

Ⓜ

A Lagrange-féle középértéktétel a Cauchy-féle középértéktétel speciális esete ($g(x) = x$), a Rolle tétel pedig a Lagrange speciális esete.

Ⓘ Ha f folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és ott $f'(x) \equiv 0$, akkor

$$f(x) \equiv c \quad x \in [a, b]\text{-re}$$

Ⓒ A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\forall [x_1, x_2] \subset [a, b]$ -re $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad \xi \in (a, b)$$

$$\text{De mivel } f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2\text{-re} \Rightarrow f(x) \equiv \text{konst.}$$

Ⓓ Az integrálszámítás alaptétele:

Ha f és g folytonos $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és

$$f'(x) = g'(x), \quad \text{ha } x \in (a, b),$$

akkor $\exists C \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$$

Tehát csak egy állandóban különböznek.

Ⓔ $h(x) := f(x) - g(x)$ -re kell alkalmazni az előző tételt.

5.3. Feladatok

1. Alkalmazható-e az

$$f(x) = x \cdot \sin \sqrt[3]{x^2}$$

függvényre a Lagrange-féle középértéktétel a $[-1, 1]$ intervallumon?

2. Alkalmazható-e a Rolle-tétel az

$$f(x) = |\arctg x|$$

függvényre a $[-1, 1]$ intervallumon?

3. Alkalmazható-e f -re a Lagrange-féle középértéktétel?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} + \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 0$$

Ha igen, $\xi = ?$

4. Határozza meg a deriválás elvégzése nélkül a

$$p(x) = (x-2,1)(x-2,3)(x-2,5)(x-2,7)$$

polinom deriváltjának gyökeit 0,1-nél kisebb hibával!

5. Bizonyítsa be, hogy

$$a) |\sin a - \sin b| \leq |a - b|, \quad \text{ahol } a, b \in \mathbb{R} \text{ és } a < b.$$

$$b) \frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}, \quad \text{ahol } 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

$$c) \operatorname{tg} x - 1 > 2x - \frac{\pi}{2}, \quad \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$d) \operatorname{arsh}(1+x^2) < 1 + \operatorname{arsh} x^2$$

$$e) \sin x \leq \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}; \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} + \frac{\pi}{4}(x-1), & x \neq 1 \\ b, & x = 1 \end{cases}$$

a) Adja meg b értékét úgy, hogy f -re a $[0, 1]$ intervallumon alkalmazható legyen a Rolle-féle középértéktétel!

b) Keressen egy olyan értéket, amely a Rolle-tétel értelmében létezik!

6. L'Hospital szabály

Ⓔ alakra alkalmazható közvetlenül.)

Ⓓ Legyen f és g differenciálható $K_{\alpha, \delta}$ -ban és itt $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ és

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$$

$$\text{Ha } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta, \quad \text{akkor } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta.$$

(Itt $\alpha = x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, +\infty, -\infty$ lehet, $\beta = b, +\infty, -\infty$ lehet).

Ⓔ $\alpha = x_0$ -ra bizonyítjuk.

$$f(x_0) := 0, \quad g(x_0) := 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\text{Cauchy-féle k.é.t.}) \quad \xi \in (x, x_0) \quad (\text{ill. } \xi \in (x_0, x))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{ha ez utóbbi létezik (véges vagy } \infty)$$

Hasonló tétel bizonyítható $\frac{\infty}{\infty}$ alakra is.

Határozatlan alakok:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$: L'H közvetlenül alkalmazható.

$0 \cdot \infty$: átalakítás után: $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \vee \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ alakkal próbálkozunk.

$\infty - \infty$: $h(x) := \frac{1}{f(x)}, k(x) := \frac{1}{g(x)}, f(x) - g(x) = \frac{1}{h(x)} - \frac{1}{k(x)} = \frac{k(x) - h(x)}{h(x)k(x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$0^0, 1^\infty, \infty^0$: $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$
 $g(x) \cdot \ln f(x)$ határozatlan alakra már a megismert módon dolgozhatunk.

Példák:

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \dots \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0 \quad (n \text{ lépés})$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{1} = 0$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - xe^{\cos x}}{-1 - \sin x + \cos x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x - e^{\cos x} + xe^{\cos x} \sin x}{-\cos x - \sin x} = \frac{3 - e}{-1}$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh } x - x}{x^3} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch } x - 1}{3x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh } x}{6x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{ch } x}{6} = \frac{1}{6}$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) \cdot \text{tg } \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\text{ctg } (\frac{\pi}{2} x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} x)} \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos 5x) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \cos 5x} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5 \sin 5x}{\cos 5x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-25}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_1 \cdot \frac{1}{\cos 5x} = -\frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 5x)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{25}{2}}$$

(Pl.) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{2}{\pi - 2x}} = ?$

$$(1 + \cos x)^{\frac{2}{\pi - 2x}} = e^{\frac{2 \ln(1 + \cos x)}{\pi - 2x}} = e^{\frac{2 \ln(1 + \cos x)}{\frac{\pi}{2} - x}} \stackrel{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\rightarrow} e^{3 \cdot 1} = e^3, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\text{ctg } x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{1 + \cos x} \cdot (-\sin x)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} = 1$$

(Pl.) Legyen $f(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}}$, ha $x \in (0, 1)$, $f(0) = b$.

1. $f'(x) = ?$, ha $x \in (0, 1)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = ?$

3. Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f -re alkalmazható legyen a Lagrange-féle középértéktétel a $[0, 1]$ intervallumon?
 (Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!)

Megoldás:

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x^4} \ln \cos x^2}$

$$f'(x) = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \left(\frac{\ln \cos x^2}{x^4} \right)' = (\cos x^2)^{\frac{1}{x^4}} \frac{\frac{1}{\cos x^2} (-\sin x^2) \cdot 2x \cdot x^4 - (\ln \cos x^2) \cdot 4x^3}{x^8}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \cos x^2}{x^4} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\cos x^2} (-\sin x^2) \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-1}{2 \cos x^2} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_1 = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x^4} \ln \cos x^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

3. Ha $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, azaz $b = e^{-\frac{1}{2}}$, akkor f folytonos $[0, 1]$ -ben és differenciálható $(0, 1)$ -ben, így alkalmazható a Lagrange-féle középértéktétel.

(Pl.) A derivált definíciója alapján mutassa meg, hogy az

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$$

függvénynek az $x = 0$ -ban létezik a jobb oldali deriváltja!

Írja fel az $x = 0$ pontbeli jobb oldali érintő egyenesének egyenletét!

Megoldás:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}} - 1}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} \sqrt{x}}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{4},$$

mert $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} u}{u} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} u}{1} = 1$, és most $u = \sqrt{x} \rightarrow 0$.

$$y_t = f(0) + f'_+(0)(x - 0) = 1 + \frac{1}{4}x, \quad x \geq 0$$

7. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai

(M) $I = (a, b)$ $(-\infty, \infty)$ is lehet

Néhány definíció:

- (D) f monoton nő I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (D) f szigorúan monoton nő I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$.
- (D) f monoton csökken I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$.
- (D) f szigorúan monoton csökken I -n: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$.
- (D) f alulról konvex I -n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ -re $f(x) \leq h_{x_1, x_2}(x)$, ha $x \in (x_1, x_2)$.
(h_{x_1, x_2} az x_1 -en és x_2 -n áthaladó húr)

(D) f alulról konkáv I -n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ -re $f(x) \geq h_{x_1, x_2}(x)$, ha $x \in (x_1, x_2)$.
(h_{x_1, x_2} az x_1 -en és x_2 -n áthaladó húr)

(D) f -nek x_0 -ban inflexiós pontja van, ha ott folytonos, és konvex és konkáv szakaszok találkoznak itt.

(T₁) Ha f differenciálható I -n:

1. f monoton nő $\iff f'(x) \geq 0$
2. f szigorúan monoton nő $\iff f'(x) > 0$
3. f monoton csökken $\iff f'(x) \leq 0$
4. f szigorúan monoton csökken $\iff f'(x) < 0$

(B)

1. \implies :

$$f \text{ monoton nő} \implies \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad (\neq \text{ vagy } \equiv \text{ alakú})$$

$$\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$$

\impliedby :

$x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_2$: $[x_1, x_2]$ -ben alkalmazható a Lagrange középértéktétel:
 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0$ (a feltétel miatt) $\xi \in (x_1, x_2)$.

Mivel $x_2 - x_1 > 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$.

2. Bizonyítása lényegében megegyezik az előzővel.

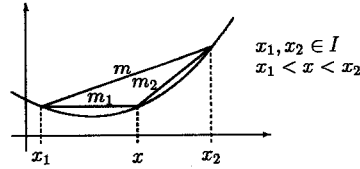
Itt $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ -ból következik, hogy $f(x_2) > f(x_1)$. Tehát szigorúan monoton.

(T₂) Ha f differenciálható I -n:

1. f' monoton nő $\iff f$ konvex
2. f' monoton csökken $\iff f$ konkáv

(B)

1. Csak \Leftarrow irányban bizonyítjuk.
Az ábra alapján a konvexitásból
következik, hogy $\forall x \in (x_1, x_2)$ -re:



$$m_1 \leq m \leq m_2.$$

Így $\lim_{x \rightarrow x_1} m_1 = f'(x_1) \leq m \leq f'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} m_2$, vagyis $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, tehát f' monoton nő.

(M)

$$f'(x_1) \leq m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Ebből

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \forall x_1 < x_2\text{-re, ill.}$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad \forall x_1 < x_2\text{-re.}$$

Tehát konvex görbe az érintője felett halad az érintési pontot kivéve.
(Konkáv görbe pedig az érintője alatt halad az érintési pontot kivéve.)

(T₃)

Ha f kétszer differenciálható I -n:

1. $f''(x) \geq 0 \iff f$ konvex

2. $f''(x) \leq 0 \iff f$ konkáv

(B)

$$\begin{array}{l}
 1. f''(x) \geq 0 \xrightarrow{T_1 \text{ miatt}} f' \text{ monoton } \uparrow \xrightarrow{T_2 \text{ miatt}} f \text{ konvex} \\
 f''(x) \geq 0 \xleftarrow{T_1 \text{ miatt}} f' \text{ monoton } \uparrow \xleftarrow{T_2 \text{ miatt}} f \text{ konvex}
 \end{array}$$

(M) Az állítások igazak maradnak, ha I zárt és f a zárt intervallumban folytonos, nyíltban differenciálható.

Példák

(Pl.) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x$

$$f'(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1)$$

$$f''(x) = 2x - 7$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 6)$	6	$(6, \infty)$
f'	+	0	-	0	+
f	\nearrow	lok. max.	\searrow	lok. min.	\nearrow

$$f(1) = \frac{17}{6} \quad f(6) = -18$$

x	$(-\infty, \frac{7}{2})$	$\frac{7}{2}$	$(\frac{7}{2}, \infty)$
f''	-	0	+
f	\cap	infl. pont	\cup

$$f\left(\frac{7}{2}\right) < 0$$

(Pl.) $f(x) = e^{2x} - (4x + 1)$

- Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f monoton növekedő, illetve fogyó.
- Adja meg azokat a nyílt intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv.

Megoldás:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4 = 0 \implies e^{2x} = 2 \implies 2x = \ln 2 \implies x = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

x	$(-\infty, \ln \sqrt{2})$	$\ln \sqrt{2}$	$(\ln \sqrt{2}, \infty)$
f'	-	0	+
f	\searrow		\nearrow

$$f''(x) = 4e^{2x} > 0$$

f monoton csökken $(-\infty, \ln \sqrt{2})$ -n, monoton nő $(\ln \sqrt{2}, \infty)$ -en.
 f konvex $(-\infty, \infty)$ -en.

(Pl.) Legyen

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 1}$$

Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol f monoton nő, f monoton csökken, f konvex, f konkáv!

Megoldás:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{Nem intervallum!})$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x - 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)^2 - e^x 2(e^x - 1)e^x}{(e^x - 1)^4} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^4} (1 - e^{2x})$$

$f'(x) > 0$: f szigorúan monoton nő a $(-\infty, 0)$ és a $(0, \infty)$ intervallumon.

$f''(x) > 0$, ha $x < 0$: $(-\infty, 0)$ intervallumon f konvex

$f''(x) < 0$, ha $x > 0$: $(0, \infty)$ intervallumon f konkáv

8. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

(D) f x_0 -ban lokálisan növekedő, ha $\exists K_{x_0, \delta}$:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0)\text{-ra } f(x) \leq f(x_0) \text{ és } x \in (x_0, x_0 + \delta)\text{-ra } f(x_0) \leq f(x).$$

(D) f x_0 -ban lokálisan csökkenő, ha $\exists K_{x_0, \delta}$:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0)\text{-ra } f(x) \geq f(x_0) \text{ és } x \in (x_0, x_0 + \delta)\text{-ra } f(x_0) \geq f(x).$$

(T) Ha f differenciálható x_0 -ban és

$$1. f \text{ lokálisan nő } x_0\text{-ban} \implies f'(x_0) \geq 0$$

$$2. f \text{ lokálisan nő } x_0\text{-ban} \iff f'(x_0) > 0$$

(B)

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{=} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\neq} = f'_+(x_0) = f'(x_0) \geq 0$$

$$2. \underbrace{f'(x_0)}_A = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\circledast} > 0 \quad (A - \varepsilon < \circledast < A + \varepsilon, \quad \varepsilon := \frac{f'(x_0)}{2})$$

$$0 < \frac{f'(x_0)}{2} < \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \frac{3}{2}f'(x_0), \quad \text{ha } |h| < \delta(\varepsilon).$$

Tehát $K(x_0, \delta)$ -ban $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0 \implies f$ lokálisan nő x_0 -ban.

(T) $K(x_0, \delta) \subset D_f$ (belső pont); $K(x_0, \delta) \subset D_f$
Differenciálható függvény esetén *lokális szélsőérték* létezésének

1. szükséges feltétele: $f'(x_0) = 0$

2. elégséges feltétele:

a) $f'(x_0) = 0$ és f' előjelet vált x_0 -ban (tehát f' lokálisan csökken vagy lokálisan nő x_0 -ban)

b) Ha f kétszer differenciálható x_0 -ban: $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$
($f''(x_0) > 0$: lok. min.; $f''(x_0) < 0$: lok. max.)

(B)

1. a Rolle tétel előtt volt

2. a) f' lokálisan csökken:

	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
f'	$+$ (≥ 0)	0	$-$ (≤ 0)
f	\nearrow	lok. max.	\searrow

f' lokálisan nő:

	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	lok. min.	\nearrow

(M) A tétel csak elégséges, ezt mutatja az alábbi példa:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

b) $f''(x_0) > 0 \implies f'$ lok. nő x_0 -ban és $f'(x_0) = 0 \implies$ lok. min.
 $f''(x_0) < 0 \implies f'$ lok. csökken x_0 -ban és $f'(x_0) = 0 \implies$ lok. max.

Megoldás:

$$0 \cdot \operatorname{sh} 0 - y_0 \operatorname{ch} y_0 = 0 \implies y_0 = 0 = f(0)$$

$$\operatorname{sh} x + x \cdot \operatorname{ch} x - y' \operatorname{ch} y - y(\operatorname{sh} y) \cdot y' = 0$$

$$0 + 0 - y' - 0 = 0 \implies y'(0) = 0$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x - y'' \operatorname{ch} y - y'(\operatorname{sh} y)y' - y'(\operatorname{sh} y)y' - y(\operatorname{ch} y)y'y' - y(\operatorname{sh} y)y'' = 0$$

$$1 + 1 + 0 - y''(0) - 0 - 0 - 0 - 0 = 0 \implies y''(0) = 2 \text{ és } y'(0) = 0, \text{ tehát lokális minimuma van.}$$

9. Egyenes aszimptota $\pm\infty$ -ben

Ⓓ A $g(x) = Ax + B$ lineáris aszimptotája a $+\infty$ -ben ($-\infty$ -ben), ha $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$)

Pl. $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ -nek $g(x) = x + 2$ lineáris aszimptotája $\pm\infty$ -ben.

Ha $\exists +\infty$ -ben aszimptota:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax - B) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) \right) = 0 \text{ miatt}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x} \right) = 0 \text{-nak fenn kell állnia.}$$

Vagyis $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A$ szükséges feltétele az aszimptota létezésének.

De nem elégséges, mert még kell, hogy ezzel az A -val:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax - B) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = B$$

($x \rightarrow -\infty$ -re hasonlóan).

$$\text{Tehát } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = A, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - Ax) = B \iff \exists \text{ lineáris aszimptota.}$$

Ⓔ $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$ Van-e lineáris aszimptotája $+\infty$ -ben?

Megoldás:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{x}} = 1$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{\frac{2}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad h := \frac{2}{x} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^h - 1}{\frac{1}{2} \cdot h} = 2$$

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ nevezetes határérték} \right)$$

(L'H-lal is megoldható, de hogyan?) Tehát $g_a = x + 2$.

10. Függvényvizsgálat

Teendők:

- D_f ; nullahelyek (ha megállapítható); periodicitás; paritás; határértékek: $+\infty$ -ben, $-\infty$ -ben (ha van értelme), a szakadási pontokban, határpontokban.
- f' vizsgálata (\nearrow, \searrow , lok. szé.).
- f'' vizsgálata (\cap, \cup , inf. pont) Ha szükséges, magasabb deriváltak vizsgálata.
- Lineáris aszimptoták.
- f ábrázolása, R_f meghatározása.

10.1. Folytonos függvények zárt intervallumbeli szélsőértékei (abszolút szélsőértékek)

Zárt intervallumban folytonos függvénynek van minimuma és maximuma (Weierstrass II. tétele). Lehetséges helyek:

- ahol a függvény nem deriválható
- deriválható és lokális szélsőérték hely (elég a szükségességet vizsgálni)
- az intervallum végpontjaiban

Végül a szóba jövő értékek közül kell kiválasztani a legnagyobbat és a legkisebbet.

Példák:

(Pl.) $f(x) = x^2 \ln x$ Végezzen függvényvizsgálatot!

Megoldás:

$D_f = (0, \infty)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +0} -\frac{1}{2}x^2 = 0$

Nullahely: $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

x	$(0, e^{-\frac{1}{2}})$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$
f'	-	0	+
f	\searrow	lok. min.	\nearrow

$f''(x) = 2 \ln x + 3 = 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$

x	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$
f''	-	0	+
f	\cap	infl. pont	\cup

$f(e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2e}$ $f(e^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{2e^3}$ $R_f = [-\frac{1}{2e}, \infty)$

Aszimptota: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x = \infty \Rightarrow$ nincs egyenes asimptota.

HF. Hány valós gyöke van az $x^2 \ln x - a = 0$ egyenletnek? ($a \in \mathbb{R}$)

(Pl.) Legyen

$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot, és ábrázolja a függvényt! Van-e a függvénynek egyenes asimptotája a $+\infty$ -ben?

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R}$ Nullahelyek: $x = \pm 1$

Páros függvény, ezért elég $x \geq 0$ -ra vizsgálni és tükrözni az y tengelyre.

Van-e lineáris asimptota $+\infty$ -ben?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x^3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \infty$$

Nincs lineáris asimptota.

$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x - 1)^2(x + 1)^2}}{\sqrt[3]{(x - 1)^3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{(x + 1)^2}{x - 1}} = \#$

x	$\dots (-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	+	0	-	$\#$	+
f	\nearrow	lok. max.	\searrow	lok. min.	\nearrow

$f(0) = 1, \quad f(1) = 0$

$f''(x) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - x \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \frac{4(x^2 - 1) - \frac{2}{3}x^2}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} = \frac{4}{9} \frac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$

x	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f''	-	$\#$	-	0	+
f	\cap	\cap	\cap	infl. pont	\cup

$f(\sqrt{3}) = \sqrt[3]{4}, \quad f'(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \quad R_f = [0, \infty)$

(Pl.)

$f(x) = \sqrt[3]{2x - 8} - \frac{2}{3}x + 3$

Keresse meg f szélsőértékeit a $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ intervallumon!

Megoldás:

f folytonos $\left[0, \frac{9}{2}\right]$ -en W. II. t. \exists min. és max.

Ahol nem deriválható: $x = 4 \in I$: $f(4) = \frac{1}{3}$

Az intervallum végpontjai: $f(0) = 1$, $f\left(\frac{9}{2}\right) = 1$

Ahol differenciálható és lokális szélsőértéke lehet: $f'(x) = \frac{1}{3}(2x-8)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 - \frac{2}{3} = 0 \implies (2x-8)^{-\frac{2}{3}} = 1 \implies 2x-8 = \pm 1 \implies x = \frac{9}{2}, \frac{7}{2}$ $f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{1}{3}$

Tehát a fenti értékek közül kiválasztva, a maximum $x = 0$ -ban ill. $x = \frac{9}{2}$ -ben van, értéke: 1, a minimum pedig $x = \frac{7}{2}$ -ben, értéke: $-\frac{1}{3}$.

11. Feladatok

1. Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{\operatorname{arctg} bx}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x^3 - x}{x^2 + x + 1}$

2. Határozza meg az

$$y = \frac{\pi}{2} + \arcsin 2x$$

értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

3. A derivált definíciója alapján vizsgálja meg, hogy differenciálható-e a 0-ban az

$$f(x) = \sqrt[3]{x \cdot \sin 2x \cdot \arcsin 3x}$$

függvény?

4. $f(x) = 3\pi - \arccos(1-x)$

a) $D_f = ?$ Írja fel az $x_0 = \frac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenesének egyenletét!

b) Invertálható-e f ? $f^{-1}(x) = ?$ $D_{f^{-1}} = ?$

5. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ $x_0 = -\frac{1}{2}$ pontbeli érintő egyenese?

6. Ábrázolja az

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

függvényt!

7. $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; $g(x) = x^2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

a) Tegye folytonossá a 0 helyen az f és g függvényeket!

b) $f'(0) = ?$, $g'(0) = ?$

8. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

$f'(1) = ?$ $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = ?$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ?$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 2e^{3x} + 1}{2e^{2x} + 3e^{3x} + 1} = ?$

10. Határozza meg az

$$f(x) = 1 + \ln(x^3 + 1)$$

függvény inverzét (ha létezik), az inverz függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

11. $f(x) = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Adja meg a fenti függvény

a) értelmezési tartományát, értékkészletét,

b) inverzét, amennyiben és ahol az létezik.

12. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right)$

a) $D_f = ?$, $R_f = ?$

b) $f^{-1}(x)$; $D_{f^{-1}} = ?$; $R_{f^{-1}} = ?$

13. $f'(x) = ?$

a) $f(x) = (\ln x)^x$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = (\sin x)^{\cos x^2}$

d) $f(x) = (\sin^2 x)^{\sqrt{x+1}}$

e) $f(x) = (\arctg 2x)^x$

f) $f(x) = x^x$

14. Írja fel a megadott ponton átmenő $y = f(x)$ függvény érintő egyenesének egyenletét, ha a függvény kielégíti a megadott implicit kapcsolatot!

a) $2x^3 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0; \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -2$

b) $x \sin y + y \sin x = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{4}; \quad x_0 = \frac{\pi}{3}; \quad y_0 = \frac{\pi}{4}$

c) $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2); \quad x_0 = 3; \quad y_0 = 1$

d) $y^2 \sin \pi y + x \cos \pi x + y = 1; \quad P_0(1, 2)$

e) $x \ln y + y \ln x = 1; \quad P_0(e, 1)$

f) $(x^2 + y^2)^3 - 26x^2y^2 = -18; \quad P_0(-1, 1)$

15. Milyen lokális tulajdonsága van az $x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 0$ pontban az

$$x^2 \sin y + y + \sin x = 1$$

implicit adott függvénynek?

16. $(x-2)^3(1-x) = y^3 + y; \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 0$

Van-e a fenti implicit megadású görbének lokális szélsőértéke, ill. inflexiója az (x_0, y_0) pontban?

17. Milyen lokális tulajdonságai vannak az

$$x \cos \pi y + y^2 x + y \cos \pi x = 0$$

egyenlet által definiált $y(x)$ függvénynek az $x = 0$ pontban?

18. A kétszer folytonosan differenciálható $y = y(x)$ függvény kielégíti az

$$y^3 - x^5 + x^2 - y^2 = 4$$

implicit egyenletet és $y(1) = 2$.

a) $y'(1) = ? \quad y''(1) = ?$

- b) Van-e 1-nek olyan környezete, amelyben a fenti $y = y(x)$ függvény alulról konvex vagy alulról konkáv? (Vigyázat! Ez nem lokális tulajdonság.)

19. $f(x) = x - 1 + \arctg x^3$

a) $f'(x) = ?$ Invertálható-e D_f -en?

- b) Írja fel az f^{-1} függvény $(\frac{\pi}{4}, 1)$ pontbeli érintőjének egyenletét!

20. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{th } x = ?$ (Indokoljon!)

b) $f(x) = \begin{cases} \text{th } \frac{x-1}{x+2}, & x \neq -2 \\ b, & x = -2 \end{cases}$

Megválasztható-e b értéke úgy, hogy f mindenütt folytonos legyen? Hol létezik $f'(x)$?

- c) Az inverzfüggvény meghatározása nélkül számítsa ki $f^{-1}(0)$ értékét!

21. Vizsgáljuk meg, hogy $0 \leq \varepsilon < 1$ esetén invertálható-e az

$$y = x - \varepsilon \cdot \sin x$$

ún. Kepler-egyenletnek eleget tevő függvény! Ha invertálható, határozzuk meg az inverz deriváltját is.

Megoldás:

$$y' = 1 - \varepsilon \cos x \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon].$$

Mivel $\varepsilon \in [0, 1) \implies y' > 0 \implies y$ szigorúan monoton nő \implies invertálható (mivel y folytonos is, az inverz is folytonos). Mivel az inverzfüggvényt nem tudjuk explicit előállítani, csak az implicit függvény deriválása végezhető el. Az inverzfüggvényre vonatkozó implicit egyenlet ($x \leftrightarrow y$):

$$x = y - \varepsilon \cdot \sin y$$

Ezt x szerint deriválva:

$$1 = y'(x) - \varepsilon (\cos y) y'(x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y(x)}$$

22. $f(x) = \begin{cases} \text{ch } x, & \text{ha } x \leq 1 \\ \arctg \frac{1}{1-x}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

- a) Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken a függvény szigorúan monoton!

b) $\sup_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ? \quad \inf_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$

$\max_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ? \quad \min_{x \in [-\frac{1}{2}, 2]} \{f(x)\} = ?$

- c) Tekintsük az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon áthaladó húrokat, ahol $1 < a < b < 2$. Van-e köztük vízszintes?

d) Legyen $g(x) = \arctg \frac{1}{1-x}$ és $D_g = (1, \infty)$.

Határozzuk meg a g^{-1} inverz függvényt! $D_{g^{-1}} = ?$

23. Keresse meg az alábbi határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{e^x}$

k) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$

l) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\operatorname{tg} x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$

m) $\lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x; \quad n \in \mathbb{N}^+$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

o) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1-x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \cdot \sin x} \right)$

p) $\lim_{x \rightarrow +0} (1 + \arcsin 2x)^{\frac{1}{2x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

q) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{e^x - 1}{x} \right)$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\arctg x)}{\operatorname{tg} 2x}$

i) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$

s) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^k}, \quad k \in \mathbb{N}^+$

24. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital szabály alkalmazása nem vezet célhoz a határértékek kiszámításánál, és számítsuk ki a keresett határértékeket!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{\sin 2x + 2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad (= \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(x+5)}{\operatorname{ch}(x-1)}$

25. Határozza meg a és b értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^x \sin x, & \text{ha } x > 0 \\ ax + b, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható legyen \mathbb{R} -en!

26. $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{x-2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!

b) Írja fel az $x_0 = 1$ pontbeli érintő egyenletét!

27. $f(x) = \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right)^{\frac{1}{1-x}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$, ha $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$.

28. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = ?$

b) $f'(x) = ?$

29. $f(x) = \begin{cases} (x^2)^{x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ b, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

a) Határozza meg b értékét úgy, hogy f folytonos legyen!

b) Bizonyítsa be, hogy ekkor f differenciálható is a 0 pontban!

c) Írja fel a 0 pontbeli érintő egyenes egyenletét!

30. $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & \text{ha } x \neq 0 \\ a, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

a) Válassza meg a értékét úgy, hogy f folytonos legyen $x = 0$ -ban!

b) $f'(x) = ?$

31. Legyen $f(x) = |x|3^{-|x|}$

a) Létezik-e $f'(0)$?

b) Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét \mathbb{R} -en, amennyiben ezek léteznek.

c) $\min_{x \in [1, \infty]} \{f(x)\} = ?$, $\inf_{x \in [1, \infty]} \{f(x)\} = ?$

32. a) Vázolja az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján. (Konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük.)

b) Adja meg az $x^3 - 6x^2 + 9x = C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát a C valós szám függvényében!

33. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$

b) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

34. $f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x}$

Van-e lineáris aszimptotája $\pm\infty$ -ben?

35. $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + 1$

Van-e lineáris aszimptotája $-\infty$ -ben?

36. $x(t) = \frac{\sin t}{t^2 + 1}$; $y(t) = \sqrt{2 + \cos t} + 2t$

a) $\dot{x}(t) = ?$ $\dot{y}(t) = ?$

b) Írja fel a görbe $t_0 = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordinátákkal!

37. $x(t) = e^{2t} + t^2$; $y(t) = \operatorname{ch} 3t + 2t$

a) Mutassa meg, hogy a fenti paraméteres egyenletrendszer a $t_0 = 0$ paraméterű x_0 pont egy környezetében meghatároz egy $y = f(x)$ függvényt!

b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek az f függvénynek az x_0 pontban?

38. Milyen lokális tulajdonsága van az

$$x = t^2 + 2 \cos \frac{\pi}{2} t, \quad y = \sin \pi t + \frac{\pi}{2} t^2$$

által meghatározott $y = f(x)$ függvénynek a $t_0 = 1$ paraméterű $x_0 = x(t_0)$ pontban?

12. Néhány kidolgozott feladat

(Pl.) $f(x) = \frac{\sin x}{x} + x^2 \sin \frac{1}{x}$ $\pm\infty$ -ben van-e lineáris aszimptotája?

Megoldás:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\frac{\sin x}{x^2}}{\frac{1}{\infty} \rightarrow 0} + \underbrace{x \cdot \sin \frac{1}{x}}_{\frac{\sin \frac{1}{x} \rightarrow 1}} \right) = 1 = A$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - Ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + \underbrace{x^2 \sin \frac{1}{x} - x}_{\infty \cdot 0 - \infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{x^2 \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)}_{\infty \cdot 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{=}$$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 0 = B$$

$g_a = x$: aszimptota a $\pm\infty$ -ben.

(Pl.) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + 1$ aszimptota $-\infty$ -ben?

Megoldás:

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1$$

$$B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} + 1 + x) \underset{u := -x}{=}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} (\sqrt{u^2 + u + 1} - u) \frac{\sqrt{u^2 + u + 1} + u}{\sqrt{u^2 + u + 1} + u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u + 1}{\sqrt{u^2 + u + 1} + u} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u \left(1 + \frac{1}{u}\right)}{\sqrt{u^2} \sqrt{1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} + u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{u} \frac{1 + \frac{1}{u}}{\sqrt{1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$g_a = -x + \frac{1}{2}$$

(Pl.) Legyen $f(x) = |x|3^{-|x|}$.

1. Létezik-e $f'(0)$?

2. Határozza meg f legnagyobb és legkisebb értékét \mathbb{R} -en (amennyiben ezek léteznek)!

3. $\min_{x \in [1, \infty)} f(x) = ?$ $\inf_{x \in [1, \infty)} f(x) = ?$

Megoldás:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|3^{-|x|}}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|3^{-|x|}}{x} = -1 \implies x = 0\text{-ban nem differenciálható}$$

$$2. f \text{ páros, } x \geq 0 \text{ esetén } f(x) = x3^{-x}$$

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3^x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0$$

$$f'(x) = 3^{-x} - \ln 3 \cdot x 3^{-x} = 3^{-x}(1 - \ln 3 \cdot x) = 0 \implies x = \frac{1}{\ln 3}$$

x	$\left(0, \frac{1}{\ln 3}\right)$	$\frac{1}{\ln 3}$	$\left(\frac{1}{\ln 3}, \infty\right)$
f'	$+$	0	$-$
f	\nearrow	lok. max.	\searrow

$$\min_{z \in \mathbb{R}} f(x) = 0 \quad \max_{z \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\ln 3} 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$$

$$3. \frac{1}{\ln 3} < 1 \quad (\text{mert } \ln 3 > 1)$$

$$\min_{[1, \infty)} f(x) \text{ nem létezik,} \quad \inf_{[1, \infty)} f(x) = 0$$

- Pl. 1. Válassza az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ függvényt az első derivált vizsgálata alapján (konvexitást, aszimptotát nem kérdezzük).
2. Adja meg az $x^3 - 6x^2 + 9x = C$ egyenlet különböző valós gyökeinek számát a C valós szám függvényeként. Válaszát indokolja.

Megoldás:

$$1. f(x) = x(x-3)^2 = 0 \implies x = 0, x = 3$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$$

$$f(1) = 4, f(0) = 0$$

$$2. f(x) = C \text{ egyenlet megoldásainak a száma: } R_f = \mathbb{R}$$

$\implies \forall c \in \mathbb{R}$ -re van metszéspontja az $y = f(x)$ és $y = C$ görbéknek.

$c < 0$: 1 megoldás; $c = 0$: 2 megoldás; $0 < c < 4$: 3 megoldás; $c = 4$: 2 megoldás; $c > 4$: 1 megoldás.

Pl.

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = ?$$

2. Végezzen teljes függvényvizsgálatot és ábrázolja az

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

függvényt! (A függvény zérushelyét nem kell meghatározni!)

Megoldás:

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2-1} \cdot 2x}{1} = 0$$

$$2. D_f: |x| > 1 \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2 - 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \right) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = 0$$

$$\implies x_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{2} \notin D_f$$

f $(-\infty, -1 - \sqrt{2}]$ -ben és $(1, \infty)$ -ben monoton nő, $[-1 - \sqrt{2}, -1]$ -ben monoton csökken.

$$f(-1 - \sqrt{2}) < 0: \text{ itt lok. max.}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0 \implies f \text{ konkáv}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = +\infty \implies \text{csak } x = \pm 1 \text{ aszimptota}$$